TD 2
Bifurcations

Exercice 1 : Bifurcation nœud-col et forme normale (1)

Tracez le diagramme de bifurcation du système dynamique $\dot{x} = r - x^2$, avec $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Bifurcation nœud-col et forme normale (2)

(a) Montrez que le système dynamique du premier ordre

$$\dot{x} = r - x - \mathrm{e}^{-x} \tag{1}$$

présente une bifurcation nœud-col lorsque l'on varie r, et déterminez la valeur de r au point de bifurcation. Tracez également le diagramme de bifurcation.

(b) L'exemple vu en cours ($\dot{x} = r + x^2$) ou vu précédemment à l'Exercice 1 ($\dot{x} = r - x^2$) sont appelées *formes normales* car elles sont typiques de *toutes* les bifurcations nœud-col. Pour s'en convaincre, considérez le système dynamique (1) proche de la bifurcation déterminée à la question précédente, et montrez que proche de ce point, on a $\dot{x} \simeq (r-1) - x^2/2$.

Exercice 3 : Bifurcation transcritique

Pour les deux cas suivants de systèmes dynamiques du premier ordre, tracez tous les portraits de phase qualitativement différents lorsque le paramètre de contrôle r est varié. Montrez qu'une bifurcation transcritique apparaît pour une valeur critique de r que vous déterminerez. Enfin, tracez le diagramme de bifurcation correspondant.

(a) $\dot{x} = rx + x^2$

(b) $\dot{x} = rx - \ln(1+x)$

Exercice 4 : Seuil pour un laser

Nous étudions dans cet exercice un modèle simplifié d'un laser solide. Celui-ci est constitué d'une collection d'atomes optiquement actifs dans une matrice solide, délimitée par des miroirs partiellement réfléchissant formant une cavité résonante (voir Fig. 1). Lorsque le pompage (par une source externe d'énergie) est faible, chaque atome réémet de la lumière de manière incohérente, comme une lampe ordinaire. En revanche, au-dessus d'un certain seuil d'amplitude de pompage, les atomes oscillent en phase, et on obtient un laser. Le processus d'auto-organisation est spontané car l'excitation est toujours incohérente.

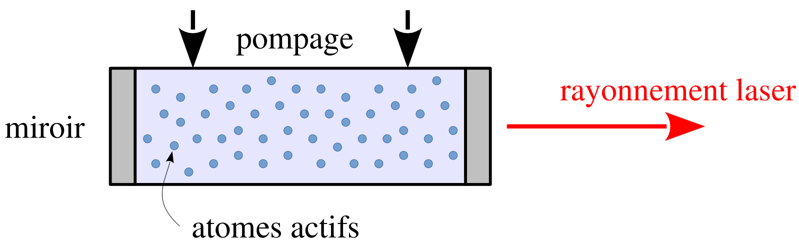

Figure 1 – © T. Dauxois

Appelons $n(t)$ la variable dynamique du problème, qui correspond au nombre de photons dans le champ laser. La dynamique de n est régie dans ce modèle simpliste par l'équation

$$\begin{aligned}\dot{n} &= \text{gain} - \text{pertes}\\ &= GnN - kn.\end{aligned}$$

Le terme de gain provient du phénomène d'émission stimulée, dans lequel des photons stimulent des atomes pour émettre des photons additionnels. Puisque ce phénomène arrive de façon aléatoire lorsque photons et atomes interagissent, le terme de gain est proportionnel à n et au nombre d'atomes excités, que l'on appelle $N(t)$. Le paramètre $G > 0$ est le coefficient de gain. Le terme de pertes (avec un taux $k > 0$) modélise la fuite des photons vers l'extérieur au travers des miroirs de la cavité ($1/k$ correspond au temps de vie typique d'un photon dans le laser).

L'idée clef est ensuite d'écrire que $N(t) = N_0 - \alpha n$, avec N_0 le nombre d'atomes excités par le pompage, et αn ($\alpha > 0$) le nombre d'atomes désexcités suite à l'émission stimulée d'un photon. L'équation du système dynamique s'écrit donc

$$\dot{n} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn. \tag{2}$$

Étudiez le système dynamique (2), et montrez en particulier qu'il existe un seuil pour le paramètre de contrôle N_0 au-delà duquel il y a émission laser.

Exercice 5 : Bifurcation fourche supercritique

On considère le système dynamique du premier ordre

$$\dot{x} = -x + \beta \tanh x, \tag{3}$$

où le paramètre de contrôle β est réel.

(a) Calculs préliminaires :

  (i) Démontrez que pour $x \ll 1$,

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

  (ii) Déterminez $\lim_{x\to\pm\infty}\{\tanh x\}$.

  (iii) Tracez $\tanh x$ en fonction de x.

(b) Montrez que l'Eq. (3) présente une bifurcation fourche supercritique lorsque le paramètre β varie. Tracez qualitativement le diagramme de bifurcation correspondant.

(c) En effectuant un changement de variable approprié $X = \alpha x$, où α est une constante à déterminer, montrez que proche de la bifurcation, l'Eq. (3) se ramène à la forme normale

$$\dot{X} = rX - X^3. \tag{4}$$

(d) Tracez le potentiel $V(X)$ associé à la forme normale (4) pour différent cas qualitativement différents, et commentez vos résultats.

Exercice 6 : Bille dans un cerceau en rotation rempli de miel

On considère une particule ponctuelle de masse m enfermée dans un cerceau de rayon R rempli de miel. Le cerceau est contraint de tourner à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical z (voir Fig. 2). Le miel produit une force de frottement visqueux qui s'oppose à son mouvement, avec un coefficient $\gamma > 0$.

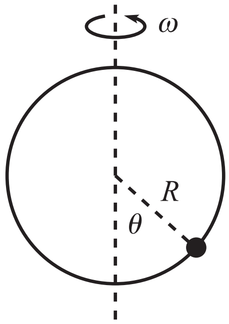

FIGURE 2 – © D. Morin

Soit θ l'angle que forme la verticale avec la position de la masse m. En projetant le Principe Fondamental de la Dynamique sur la direction tangentielle au cerceau, on peut montrer que l'équation du mouvement est donnée, en régime sur-amorti (c'est-à-dire pour γ « grand »), par

$$\frac{\gamma}{m}\dot{\theta} = \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \omega_0^2\right), \tag{5}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{g/R}$, où g est l'accélération de la pesanteur.

Déterminez les points fixes du système dynamique du premier ordre (5), effectuez une analyse de stabilité de ces points fixes, et montrez que le système subit une bifurcation fourche supercritique en fonction du paramètre de contrôle ω. En particulier, esquissez le diagramme de bifurcation correspondant.

Exercice 7 : Bifurcation fourche sous-critique avec terme stabilisateur

La forme normale d'une bifurcation fourche sous-critique $\dot{x} = rx + x^3$ peut être stabilisée avec un terme en x^5 :

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5. \tag{6}$$

(a) Déterminez les expressions analytiques de tous les points fixes de l'Eq. (6) et discutez de leur existence lorsque le paramètre de contrôle r varie.

(b) Discutez de la stabilité des points fixes de l'Eq. (6).

(c) Tracez le diagramme de bifurcation correspondant et commentez vos résultats.

(d) Quel est le potentiel $V(x)$ correspondant à l'Eq. (6) ? Tracez $V(x)$ pour différentes valeurs de r (on considérera les cas qualitativement différents). En particulier, déterminez la valeur de r pour laquelle $V(x)$ présente trois puits de stabilité de même hauteur (*i.e.*, lorsque les valeurs de V au fond des puits sont les mêmes).