

---

## TD 4

### Systèmes linéaires à deux dimensions

---

#### Exercice 1 : Classification des systèmes linéaires

- (a) En vous aidant du graphe récapitulatif du § 5.2.4. du cours, classifiez le point fixe  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  pour le système linéaire à deux dimensions  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Même question pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (c) Pour ce dernier cas, esquissez le portrait de phase correspondant.

#### Exercice 2 : Système à valeurs propres complexes

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x + y.\end{aligned}$$

- (a) Écrivez le système ci-dessus sous forme matricielle, et montrez que les valeurs propres de la matrice  $A$  correspondante sont données par  $\lambda_{\pm} = 1 \pm i$ , avec pour vecteurs propres  $(\pm i, 1)$ . (Notez que les valeurs propres de  $A$  sont complexes conjugués l'une de l'autre, et qu'en conséquence les vecteurs propres le sont aussi—ceci est dû au fait que la matrice  $A$  est à coefficients réels.)
- (b) Déterminez la solution générale  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  du système linéaire ci-dessus et exprimez votre résultat en fonction de fonctions réelles (et non pas complexes).
- (c) Esquissez le portrait de phase correspondant. Quelle est la nature du point fixe  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ?

#### Exercice 3 : Oscillateur harmonique amorti

Le mouvement d'un oscillateur harmonique amorti est décrit par l'équation

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

où  $b > 0$  est la constante d'amortissement.

- (a) Réécrivez l'équation du mouvement comme un système linéaire de dimension deux.
- (b) Classifiez le point fixe à l'origine et esquissez le portrait de phase. Vous discuterez bien les différents cas, en fonction des valeurs relatives des paramètres du problème.
- (c) Est-ce que vos résultats sont bien en accord avec les notions d'oscillateur sous-amorti, sur-amorti, et en régime critique ?