TD 3
Flot sur un cercle

Exercice 1 : Pendule sur-amorti

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L. Soit θ l'angle que forme le pendule avec la verticale (*cf.* Fig. 1). On suppose de plus que le pendule se situe dans un milieu visqueux qui donne lieu à une force de frottement (coefficient $b > 0$). De plus, un moment constant $\Gamma > 0$ force le pendule à tourner dans le sens anti-horaire.

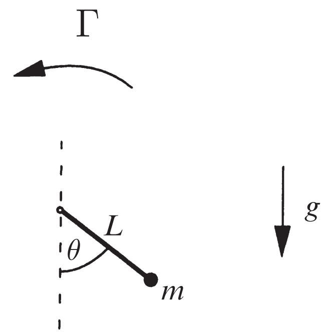

Figure 1 – © S.H. Strogatz

L'équation du mouvement s'écrit

$$mL^2\ddot{\theta} + bL^2\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère le régime sur-amorti, de sorte que l'équation précédente se réduit à

$$bL^2\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma. \tag{1}$$

(a) En introduisant les variables adimensionnées $\tau = mgt/bL$ et $\gamma = \Gamma/mgL$, montrez que l'Eq. (1) peut se réécrire comme

$$\theta' = \gamma - \sin\theta, \tag{2}$$

où $\theta' = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau$.

(b) Analysez le flot sur le cercle correspondant à l'Eq. (2) en fonction du paramètre γ, et commentez vos résultats.

Exercice 2 : Synchronisation des lucioles [1]

Les lucioles constituent l'un des exemples les plus spectaculaires de synchronisation dans la nature. Dans certaines régions d'Asie du Sud-Est, des milliers de lucioles mâles se rassemblent dans les arbres la nuit et s'allument et s'éteignent à l'unisson. Pendant ce temps, les lucioles femelles passent au-dessus de leur tête, à la recherche de mâles dotés d'une belle lumière. Pour apprécier à sa juste valeur ce spectacle étonnant, il faut le voir dans un film :

https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U

1. Traduit (par DeepL) et adapté du ¶4.5 de S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (CRC Press, 2024).

Comment se produit la synchronisation ? Les lucioles ne sont certainement pas synchronisées au départ ; elles arrivent dans les arbres au crépuscule et la synchronisation se développe progressivement au fil de la nuit. L'essentiel est que les lucioles s'influencent mutuellement : lorsqu'une luciole voit l'éclair d'une autre, elle ralentit ou accélère pour que son éclair soit plus en phase lors du cycle suivant.

Hanson (1978) a étudié cet effet expérimentalement, en faisant clignoter périodiquement une lumière sur une luciole et en la regardant essayer de se synchroniser. Pour une gamme de périodes proches de la période naturelle de la luciole (environ 0,9 s), la luciole a été capable d'adapter sa fréquence au stimulus périodique. Dans ce cas, on peut dire que la luciole a été entraînée par le stimulus. Cependant, si le stimulus est trop rapide ou trop lent, la luciole ne peut pas suivre et l'entraînement est perdu. Mais contrairement au phénomène de battement, la différence de phase entre le stimulus et la luciole n'augmentait pas uniformément. La différence de phase a augmenté lentement pendant une partie du cycle de battement, alors que la luciole luttait en vain pour se synchroniser, puis elle a augmenté rapidement jusqu'à 2π, après quoi la luciole a réessayé lors du cycle de battement suivant. Ce processus est appelé « dérive de phase ».

Ermentrout et Rinzel (1984) ont proposé un modèle simple du rythme de clignotement de la luciole et de sa réponse aux stimuli. Supposons que $\theta(t)$ soit la phase du rythme de clignotement de la luciole, où $\theta = 0$ correspond à l'instant où un éclair est émis. Supposons qu'en l'absence de stimuli, la luciole parcourt son cycle à une fréquence ω, selon $\dot{\theta} = \omega$.

Supposons maintenant qu'il existe un stimulus périodique dont la phase Θ satisfait à la condition

$$\dot{\Theta} = \Omega,$$

où $\Theta = 0$ correspond à l'éclair du stimulus. Nous modélisons la réponse de la luciole à ce stimulus comme suit : si le stimulus est en avance dans le cycle, nous supposons que la luciole accélère pour tenter de se synchroniser. Inversement, la luciole ralentit si elle clignote trop tôt. Un modèle simple qui intègre ces hypothèses est le suivant :

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta),$$

avec $A > 0$. Par exemple, si Θ est en avance par rapport à θ (c'est-à-dire si $0 < \Theta - \theta < \pi$), la luciole accélère ($\dot{\theta} > \omega$). La « force de réinitialisation » A mesure la capacité de la luciole à modifier sa fréquence instantanée.

(a) Pour savoir si l'entraînement peut se produire, nous examinons la dynamique de la différence de phase $\phi = \Theta - \theta$. Montrez que ϕ est régi par le flot sur le cercle

$$\dot{\phi} = \Omega - \omega - A \sin \phi. \tag{3}$$

(b) En introduisant les variables sans dimension $\tau = At$ et $\mu = (\Omega - \omega)/A$, montrez que l'Eq. (3) peut s'écrire

$$\phi' = \mu - \sin \phi, \tag{4}$$

où $\phi' = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$.

(c) À l'aide de l'Eq. (4), discutez du phénomène de synchronisation présenté dans l'énoncé de l'exercice.