

## TD 5 Portrait de phase

### Exercice 1 : Modèle de compétition entre moutons et lapins (1)

Dans cet exercice nous étudions un modèle de co-évolution de populations partageant une même ressource, par exemple des moutons et des lapins en compétition pour manger la même herbe (*modèle de Lotka–Volterra*). On se place dans le cadre d'un système isolé et stationnaire : il n'y a pas de prédateurs (loups ou rapaces par exemple) ni d'effet saisonnier sur la quantité d'herbe disponible. De plus on suppose que les lapins et les moutons mangent exclusivement de l'herbe, et pas d'autres aliments.

Le modèle de Lotka–Volterra prend en compte les deux ingrédients suivants :

- En l'absence de l'autre espèce, chaque espèce connaît une croissance de type logistique (*cf.* TD 1, Exercices 3 & 4).<sup>1</sup>
- En présence de l'autre espèce, il y a compétition. On suppose que les conflits sont proportionnels à la quantité de l'autre espèce. De plus nous supposons que les conflits réduisent le taux de croissance des deux populations, et que l'effet des conflits est plus impactant pour les lapins.

Si l'on appelle  $x$  ( $y$ ) la population de lapins (moutons), le système dynamique non-linéaire du second ordre qui prend en compte les hypothèses ci-dessus s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} = y(2 - x - y). \end{cases} \quad (1)$$

- Étant données les hypothèses de départ du modèle décrit ci-dessus, discutez de la pertinence du système dynamique du second ordre (1).
- Montrez que les points fixes du système (1) sont  $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) = (0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(3, 0)$ , et  $(1, 1)$ . À quelle situation démographique correspondent chacun de ces points fixes ?
- En linéarisant le système (1) au voisinage de chaque point fixe et donc en calculant la matrice jacobienne correspondante, déterminez la stabilité ainsi que la nature de chacun de ces points fixes (*i.e.*, nœud stable, instable, point col, *etc.*).
- Pour chacun des points fixes déterminés précédemment, esquissez le portrait de phase au voisinage du point fixe correspondant.
- À l'aide de vos résultats aux questions précédentes, discutez le portrait de phase de la Fig. 1 ci-dessous. On notera que dans cette figure, la variété stable liée au point col (*cf.* ligne rouge) est une *séparatrice* de l'espace des phases : elle définit deux bassins d'attraction associés aux deux nœuds stables du système dynamique, chacun correspondant à l'extinction d'une espèce selon le principe d'exculsion par compétition.

---

1. Étant donnée la capacité reproductrice légendaire des lapins, on considérera un taux de croissance plus important pour ces derniers que pour les moutons !

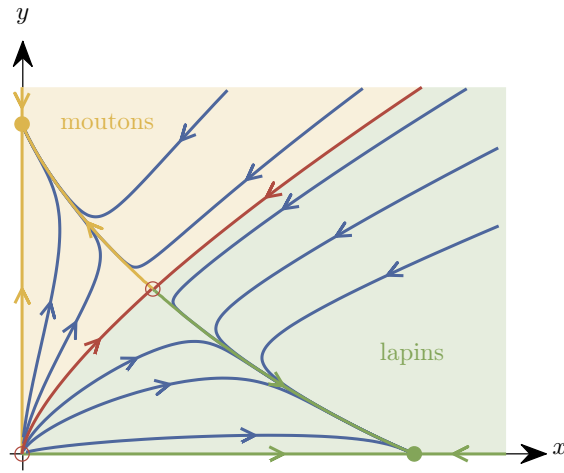


FIGURE 1 – © T. Dauxois

(f) Quelle morale écologique tirez-vous du portrait de phase de la Fig. 1 ?

### Exercice 2 : Modèle de compétition entre moutons et lapins (2)

On suppose à présent que la compétition moutons-lapins a la même influence sur les deux populations (ce qui présuppose que moutons et lapins mangent la même quantité d'herbe, ce qui est peu réaliste). On remplace alors le système dynamique (1) par

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - y), \\ \dot{y} = y(2 - x - y). \end{cases} \quad (2)$$

En reprenant l'analyse de l'Exercice 1, esquissez le portrait de phase correspondant au système dynamique (2).