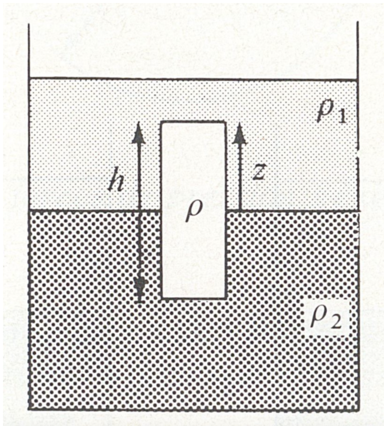
TD 5
Poussée d'Archimède

Exercice 1 : Corps immergé dans deux fluides différents



Un solide assimilable à un cylindre de section S et de hauteur h, de masse volumique ρ est immergé dans un récipient contenant deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2.

Le récipient est supposé de grandes dimensions, de sorte que les niveaux sont indépendants de la position du cylindre. Celui-ci est supposé rester dans la position verticale par un guidage sans frottement, et on repère sa position par z. Écrire l'équation permettant de déterminer la position d'équilibre z_0. Discuter l'existence d'une position d'équilibre et sa stabilité.

Exercice 2 : Statue immergée

1. Une statue en or de 15 kg trouvée dans une épave en mer est remontée au bout d'un câble. Quelle est la tension de celui-ci quand la statue est complètement immergée ? quand elle est complètement sortie de l'eau ? (La masse volumique de l'or est $19.3\,\mathrm{kg}.\ell^{-1}$, une valeur extrêmement élevée ; celle de l'eau de mer est $1.03\,\mathrm{kg}.\ell^{-1}$).
2. On pèse une cuve d'eau, dans laquelle on plonge ensuite (au bout d'un câble) la statue. Quelle est la modification de poids indiquée par la balance ?

Exercice 3 : Ascension d'un aérostat

Un aérostat est constitué d'une enveloppe souple, de volume maximal V_{max}, gonflée à l'hélium. L'enveloppe, la nacelle et les accessoires ont une masse totale m. L'enveloppe est munie d'une soupape qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre l'hélium et l'air extérieur. La pression p et la masse volumique ρ de l'air évoluent avec l'altitude z suivant les lois suivantes :

$$p(z) = p_0\,(1-\alpha z)^{\lambda}\,,$$
$$\rho(z) = \rho_0\,(1-\alpha z)^{\lambda-1}\,,$$

avec $a = 0.0225\,\mathrm{km}^{-1}$ et $\lambda = 5.2$.

1. La soupape assure l'équilibre mécanique et thermique entre l'hélium et l'air extérieur. Qu'est-ce que cela implique sur les variations de pression et de température entre l'hélium et l'air extérieur ?
2. Montrer que le rapport des masses volumiques de l'hélium et de l'air reste constant au cours de l'acension, soit que $\rho_{\mathrm{He}}/\rho = d$. Évaluer d, la densité de l'hélium par rapport à l'air.

3. On appelle force ascensionnelle $\vec{F}$, la somme des forces extérieures s'exerçant sur l'aérostat. Calculer la force ascensionnelle $\vec{F}_0$ en $z = 0$. L'exprimer en fonction de m, g, V_0, d et ρ_0 (on négligera le volume de la nacelle et des accessoires).
4. À quelle condition sur la masse m l'aérostat s'élève-t-il ? On donne que $V_0 = 500\,\mathrm{m}^3$ et $\rho = 1.2\,\mathrm{g}.\ell^{-1}$.
5. On suppose la condition de la question précédente vérifiée. Sachant que la masse d'hélium reste constante au cours de l'ascension tant que $V(z) < V_{\mathrm{max}}$, exprimer
   - le volume de l'enveloppe $V(z)$ tant que $V(z) < V_{\mathrm{max}}$;
   - la force ascensionnelle $\vec{F}$ en fonction de m, g, V_0, d et ρ_0 ;
   - l'altitude z_1 telle que $V(z_1) = V_{\mathrm{max}}$. Faire l'application numérique avec $m = 500\,\mathrm{kg}$ et $V_{\mathrm{max}} = 2V_0 = 1000\,\mathrm{m}^3$.
6. Pour $z > z_1$, la soupape est ouverte. Exprimer la force ascensionnelle en fonction de m, g, V_{max} et $\rho(z)$. En déduire le plafond z_{p} défini par $F(z_{\mathrm{p}}) = 0$. Faire l'application numérique.
7. En $z = z_{\mathrm{p}}$, montrer que la masse m' d'hélium restant dans l'enveloppe s'exprime simplement en fonction de m et de d. En déduire la masse d'hélium qui s'est échappée de l'aérostat.