TD 6
Théorème de Bernoulli

Exercice 1 : Écoulement stationnaire incompressible – notion de débit

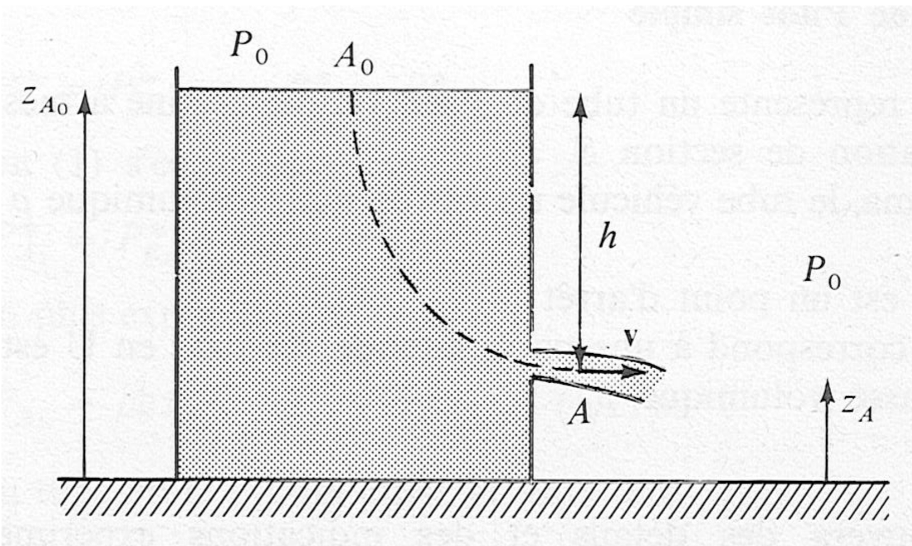
1. Un fluide parfait s'écoule en régime stationnaire dans une conduite cylindrique de diamètre constant. Montrer que les champs de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{u}_0$ constants et parallèles à l'axe du cylindre sont solutions de l'équation d'Euler avec les conditions aux limites des fluides parfaits.
2. Un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire s'écoule dans une conduite cylindrique qui présente un étranglement, c'est-à-dire une réduction de diamètre de d_1 (en amont de l'écoulement) à $d_2 < d_1$. Loin de l'étranglement, l'écoulement est similaire à celui de la question précédente, à la vitesse $\vec{v}_1$ pour l'amont et $\vec{v}_2$ pour l'aval. En intégrant la relation exprimant l'incompressibilité du fluide sur un volume bien choisi, montrer la relation

$$\overline{v_1}d_1^2 = \overline{v_2}d_2^2,$$

où $\overline{v_i}$ $(i = 1,2)$ correspond à la vitesse moyenne du fluide au travers de la surface définie par le diamètre d_i. La quantité $\overline{v_i}\pi(d_i/2)^2$ s'appelle le *débit volumique*. Pourquoi ? Comment définit-on le *débit massique* ?

Exercice 2 : Formule de Torricelli

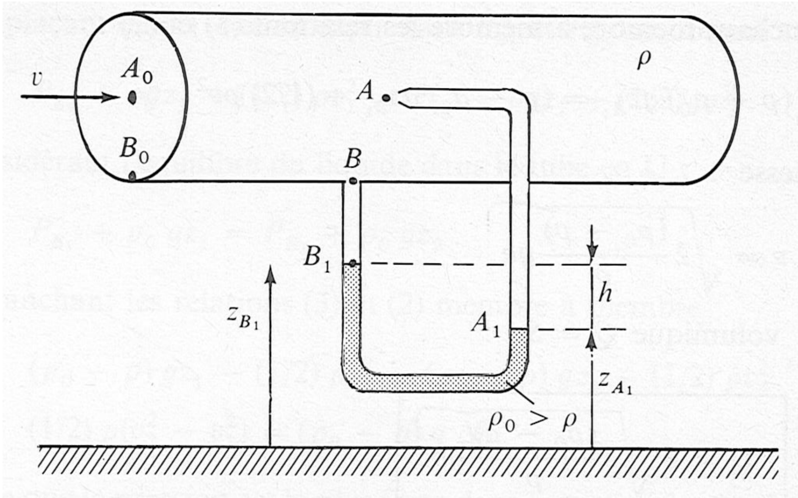
Un récipient rempli d'un liquide parfait incompressible est percé d'une petite ouverture situé à la hauteur h sous la surface libre. L'expérience montre que des lignes de courant existent entre la surface libre et le trou.



1. Si le trou est très petit, l'écoulement est quasi-stationnaire. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la vitesse d'un point de la surface libre est négligeable devant celle du fluide à la sortie.
2. Calculer la vitesse du fluide à la sortie du trou en fonction de g et h.

Exercice 3 : Tube de Pitot simple

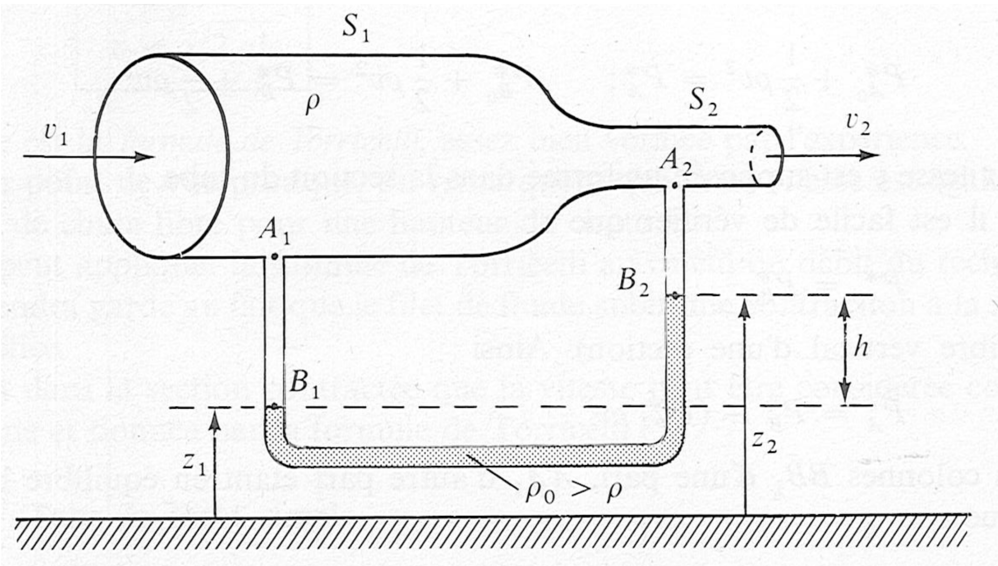
La figure ci-dessous représente un tube de Pitot simple destiné à mesurer le débit d'une canalisation de section S (il sert aussi à mesurer la vitesse par rapport à l'air des avions). Sur ce schéma la canalisation véhicule un gaz de masse volumique ρ constante animé d'une vitesse v, et supposé en écoulement de fluide parfait incompressible. Le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique ρ_0. La situation est stationnaire.



1. Que vaut la vitesse en A ? (Considérer la conservation du débit à l'intérieur du petit tube).
2. Le gaz entre les points B et B_1 est-il en mouvement ? En déduire la différence de pression $p_{B_1} - p_B$. L'écoulement du gaz est-il partout irrotationnel ?
3. En raisonnant sur les lignes de courant joignant A_0 à A et B_0 à B, trouver une relation entre p_A, p_B, z_A, z_B, ρ, v et g.
4. En déduire que la hauteur h est directement liée à la vitesse v par

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)}{\rho} gh}$$

Exercice 4 : Tube de Venturi



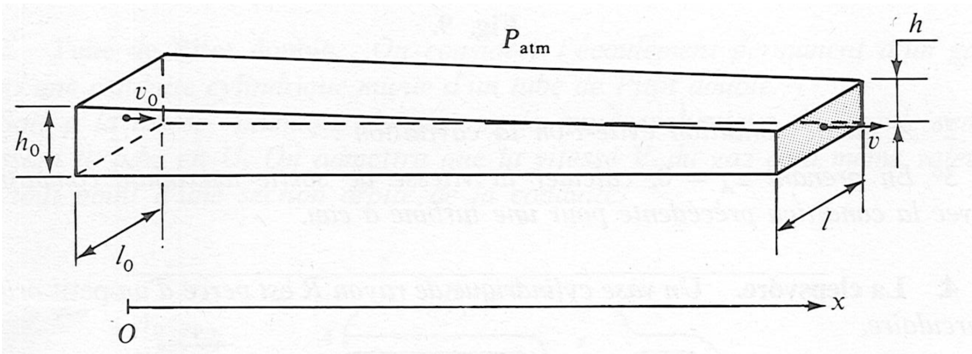
Avec les données de la figure ci-dessus, calculer le débit volumique de l'écoulement en fonction de h, des sections S_1 et S_2, et des masses volumiques ρ et ρ_0.

Exercice 5 : La clepsydre

On reprend le dispositif de l'Exercice 2 sur la formule de Torricelli. On considère que le vase est un cylindre de rayon R, le tuyau de sortie est de rayon r et que l'écoulement dans le tuyau est homogène à la vitesse v.

1. Montrer à nouveau qu'à tout instant, la vitesse de sortie $v(t)$ est reliée à la hauteur $h(t)$ si $h(t) \gg r$ et si $R \gg r$.
2. Exprimer la loi $h(t)$. On désignera par h_0 la hauteur initiale de liquide.
3. Calculer T, la durée nécessaire pour vider la clepsydre pour $R = 5\,\text{cm}$, r=2 mm, h_0 =10 cm et $g = 9.8\,\text{m.s}^{-2}$.

Exercice 6 : Régime torrentiel, régime fluvial



Un long canal (d'axe Ox) à fond plat horizontal possède localement une section rectangulaire : autour de la cote x, sa largeur est $\ell(x)$, la hauteur d'eau est $h(x)$ et la vitesse de l'eau à cet endroit est supposée uniforme valant $v(x)$.

On supposera que les variations éventuelles de $\ell(x)$ sont très lentes ($\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}x \ll 1$), ainsi les lignes de courant sont rectilignes et parallèles aux bords du canal.

L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible en écoulement permanent et irrotationnel.

1. Exprimer le débit volumique Q du canal en fonction des données à la cote x. Que peut-on dire de ce débit le long du canal ?
2. Montrer que $h + v^2/2g = h_s$, où h_s est une constante que l'on exprimera en fonction de $h_0 = h(0)$ et $v_0 = v(0)$.
3. Montrer que le débit volumique Q peut s'exprimer en fonction de g,ℓ, h_s et h. Tracer le graphe représentant $Q/h_s^{3/2}\ell\sqrt{2g}$ en fonction de h/h_s pour une largeur ℓ donnée.
4. Quelle est la valeur maximale Q_m de ce débit ? (On considèrera h_0 et v_0 comme des constantes du problème). Quelle est la hauteur h_c correspondant à ce débit maximal ?
5. Calculer numériquement Q_m pour $\ell = 10\,\text{m}$ et $g \simeq 10\,\text{m.s}^{-2}$ (avec $h_0 = 5\,\text{m}$ et $v_0 = 1\,\text{m.s}^{-1}$). Quelle est la vitesse v correspondante ?
6. Montrer graphiquement que pour $Q < Q_m$ et pour une largeur ℓ donnée, il existe deux valeurs h_1 et h_2 possibles pour h, telles que $h_1 < h_c < h_2 < h_s$. La solution h_1 correspond au régime dit *torrentiel* et h_2 au régime dit *fluvial*.
7. On suppose que ℓ subit un rétrécissement progressif et passe de ℓ à $\ell' = \ell(1-\epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$. Dans quel sens se modifie h ? Discuter suivant que l'on est dans l'un ou l'autre régime.