Examen

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1 : Modèle de bilan énergétique pour la température de la Terre

Les climatologues utilisent une hiérarchie de modèles mathématiques, allant du très détaillé au très simplifié. À une extrémité du spectre se trouvent des modèles complets contenant des milliards de variables sur l'état de l'atmosphère et des océans, prenant également en compte la glace de mer, la végétation terrestre, les écosystèmes, les cycles biogéochimiques (tels que le cycle du carbone) et la chimie atmosphérique. À l'autre extrême se trouvent des modèles conceptuels simples. Ceux-ci sont beaucoup plus faciles à comprendre, et peuvent néanmoins fournir des informations précieuses.

1re partie

Un modèle simple résume le climat en une seule variable : la température moyenne de la surface de la Terre, rapportée à l'ensemble du globe. Le modèle ignore les différences dans la composition de l'atmosphère, ainsi que les différences entre les continents et les océans, la topographie et toutes autres caractéristiques locales. Sa dynamique est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= E_{\mathrm{in}} - E_{\mathrm{out}} \\ &= (1-\alpha)Q - \epsilon\sigma T^4. \end{aligned} \tag{1}$$

Ici, C est la capacité thermique de la Terre et T est la température moyenne de surface (mesurée en degrés Kelvin) à l'instant t. On appelle cela un *modèle de bilan énergétique* car il suppose que la température moyenne change en réponse à la quantité d'énergie atteignant la Terre en provenance du Soleil (E_{in}, proportionnelle au paramètre d'irradiation solaire $Q > 0$) moins l'énergie émise vers la stratosphère (E_{out}, supposée suivre la loi de Stefan–Boltzmann). Le paramètre $0 < \alpha < 1$ est appelé albédo ; c'est la fraction du rayonnement solaire entrant que la Terre réfléchit. Sa valeur numérique est différente pour la glace, l'eau et la terre, mais ces détails sont moyennés dans ce modèle simplifié. De même, $0 < \epsilon < 1$ tient compte de manière moyenne du fait qu'une partie de l'énergie radiative sortante n'atteint pas l'espace ; au lieu de cela, une fraction de celle-ci est absorbée par les effets de serre dans l'atmosphère. Enfin, $\sigma > 0$ représente la constante de Stefan–Boltzmann.

(a) Déterminez à partir du modèle ci-dessus la température moyenne de la surface de la Terre T^* en régime permanent, exprimée en termes des autres paramètres du problème.

(b) Montrez graphiquement que T^* est un point fixe stable.

(c) Esquissez T^* en fonction de Q.

(d) Estimez la valeur numérique de T^* (à un chiffre significatif).
<u>Données</u> : $Q = 300\,\mathrm{Wm^{-2}}$, $\alpha = 0.3$, $\sigma = 6\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$, $\epsilon = 0.6$, et $50^{1/4} \simeq 3$.

2e partie

Dans la 1re partie ci-dessus, pour plus de simplicité, tous les paramètres ont été supposés indépendants de T. En particulier, α a été traité comme une constante. Rappelons que l'albédo α quantifie le degré de réflexion de la surface de la Terre ; α est défini comme la fraction du rayonnement solaire entrant qui est réfléchie en moyenne, et donc $0 < \alpha < 1$.

Or la glace est beaucoup plus réfléchissante que la terre ou les eaux libres, ce qui soulève le spectre d'une boucle de rétroaction glace-albédo incontrôlable : plus le climat se réchauffe, plus les glaciers et les calottes glaciaires polaires auront tendance à fondre, ce qui signifie que la Terre deviendra moins réfléchissante, donc encore plus de rayonnement solaire sera absorbé et la Terre deviendra encore plus chaude. À l'inverse, plus la planète se refroidit, plus la glace peut se former, augmentant la réflectivité de la Terre et la refroidissant encore plus. Un modèle simple qui prend en compte les considérations ci-dessus suppose que α diminue avec l'augmentation de la température selon

$$\alpha = a - bT,$$

avec $a > 1$ et $b > 0$ deux constantes. Le modèle (1) devient alors

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (1 - [a - bT])Q - \epsilon\sigma T^4. \tag{2}$$

(a) Montrez graphiquement que le modèle (2) peut avoir deux points fixes, ou un, ou aucun, selon la valeur de Q, et représentez le flot sur la ligne correspondant dans chacun des trois cas (en spécifiant la nature des points fixes).

(b) Comment $T(t)$ se comporte-t'elle dans les trois cas ? Assurez-vous d'expliquer comment vos résultats dépendent de la position de la température initiale $T(0)$ par rapport aux points fixes.

(c) Montrez qu'une bifurcation nœud-col se produit pour une valeur critique $Q = Q_\mathrm{c}$ et esquissez le diagramme de bifurcation correspondant.

(d) Déterminez l'expression analytique de Q_c, ainsi que celle de la temperature associée T_c au point de bifurcation en fonction des paramètres du modèle.

Exercice 2 : Équilibre gravitationnel

Une particule de masse M se déplace le long d'une ligne joignant deux masses fixes m_1 et m_2. Soit x la distance de la particule à m_1, et soit a la distance fixe entre les deux masses.

(a) Faire un schéma de la situation, et montrez que

$$\ddot{x} = \frac{Gm_2}{(x-a)^2} - \frac{Gm_1}{x^2}, \tag{3}$$

où G est la constante universelle de gravitation.

(b) En introduisant la vitesse $v = \dot{x}$, montrez que l'Eq. (3) correspond à un système dynamique non-linéaire du second ordre, que vous déterminerez.

(c) Calculez les coordonnées du point fixe (x^*, v^*) en fonction des paramètres du problème.

(d) Le point fixe est-il stable ou instable ? Justifiez rigoureusement votre réponse.
Indication : Afin de simplifier l'écriture de la matrice jacobienne, on pourra introduire le paramètre

$$\alpha = \frac{2Gm_1}{a^3}\frac{\left(1 + \sqrt{m_2/m_1}\right)^4}{\sqrt{m_2/m_1}} > 0.$$

(e) Esquissez soigneusement le portrait de phase du système dynamique au voisinage du point fixe.