Contrôle continu

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h30 min
Le sujet comprend 3 pages au total

Exercice 1 : Évolution de la pression dans un liquide compressible

On considère un liquide de masse volumique ρ, au repos dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = g\,\hat{z}$, où l'axe vertical z est orienté *vers le bas*. On note $p(x, y, z)$ le champ de pression en un point $M(x, y, z)$ du fluide.

(a) Montrez à partir de l'équation de la statique des fluides que la pression ne dépend que de la profondeur z *via* la relation

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho g. \tag{1}$$

(b) En déduire $p(z)$ pour un fluide incompressible, c'est-à-dire lorsque la masse volumique est constante. On notera p_0 la pression à la surface.

(c) La fosse des Mariannes a une profondeur h d'environ $h \simeq 11\,\mathrm{km}$. Calculez la pression à cette profondeur.
Données : $\rho = 1\,\mathrm{kg}.\ell^{-1}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $p_0 = 1\,\mathrm{bar}$.

(d) L'eau est en réalité légèrement compressible. Sa masse volumique augmente avec la pression *via* la relation

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \chi_T (p - p_0)\right],$$

où $\chi_T = 4 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$ désigne la compressibilité isotherme et $\rho_0 = 1\,\mathrm{kg}.\ell^{-1}$ la masse volumique pour $p = p_0$. À partir de l'Eq. (1), déduire le champ de pression à la profondeur z. Montrez que l'on retrouve bien le résultat de la Question (b) lorsque $\chi_T \to 0$.

(e) À la profondeur $z = h$, quelle erreur relative sur l'estimation de la pression commet-on lorsque l'on suppose que l'eau est incompressible [*cf.* Question (c)] ?
Indication : Estimez tout d'abord la valeur numérique de $\chi_T \rho_0 g h$, puis effectuez un développement limité à l'ordre adéquat de votre résultat à la Question (d).

Exercice 2 : Un modèle de clepsydre

Une clepsydre est une horloge antique, d'origine égyptienne, mesurant le temps par écoulement régulier d'un liquide dans un récipient gradué. Dans tout l'exercice, on suppose le fluide parfait (c'est-à-dire non-visqueux) et incompressible.

On considère le récipient à symétrie de révolution autour de l'axe z de la Fig. 1. En coordonnées cylindriques (r, θ, z), la distance entre la paroi du récipient et l'axe z est de la forme

$$r = a z^n,$$

où a et n sont des constantes que vous allez déterminer dans la suite. Le fond du réservoir situé en $z = 0$ est percé d'un petit orifice de section $s = 25\,\mathrm{mm}^2$. Tout le système est plongé dans l'atmosphère (pression p_{atm}) et dans le champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}$ ($g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$). On remplit la clepsydre jusqu'à une hauteur initiale h_0 et on note $h(t)$ la hauteur de la surface libre à l'instant t.

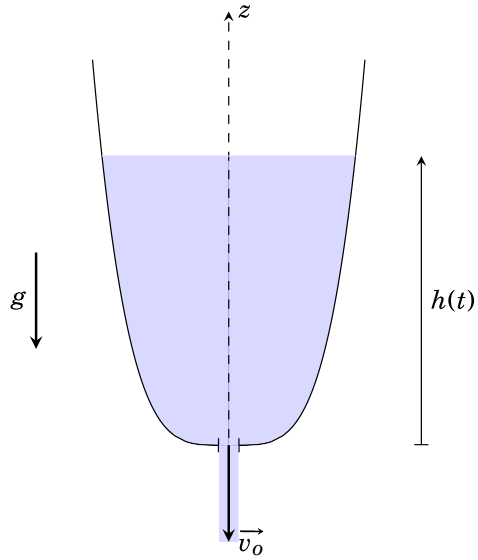

Figure 1

(a) Énoncez le plus précisément possible le théorème de Bernoulli.

(b) À l'aide de la question précédente, exprimez la vitesse de vidange v_0 en considérant que la vitesse de la surface libre v_ℓ est négligeable devant v_0.

(c) À partir de la conservation du débit volumique, montrez que la relation entre $\dot{h}(t) = \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$, $h(t)$ et s s'écrit

$$\dot{h} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi a^2} h^{1/2-2n}.$$

(d) Déterminez la valeur de n telle que $\dot{h} = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} = -1\,\mathrm{cm/min}$. En déduire une estimation numérique de la valeur de a^2.

(e) La clepsydre se vide complètement en 1 h. Quelle est sa contenance V_0 (approximative) en litre ?
Indication : Calculez le volume V_0 en intégrant des tranches de rayons r et d'épaisseur $\mathrm{d}z$.

Exercice 3 : Loi de Poiseuille

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux et newtonien dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$ (voir Fig. 2). Le tube est horizontal (orienté selon l'axe z) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression δp entre l'entrée et la sortie du tube. On appelle ρ la masse volumique du fluide et η son coefficient de viscosité dynamique.

Les hypothèses de travail sont les suivantes :

— l'écoulement est permanent ;

— l'écoulement est incompressible ;

— le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire ;

— l'écoulement est parallèle à l'axe z et invariant par rotation autour de l'axe z : $\mathbf{v}(M,t) = v(r,z)\,\hat{z}$, avec (r,θ,z) les coordonnées cylindriques usuelles ;

— on néglige la pesanteur.

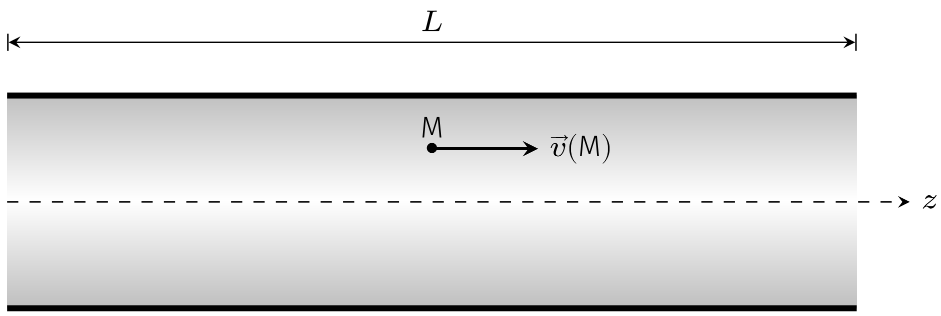

FIGURE 2

(a) Puisque le fluide est supposé incompressible, que vaut la divergence du champ de vecteur vitesse ? En déduire que $\mathbf{v}(M,t) = v(r)\,\hat{z}$.

(b) Soit $\mathbf{a}(M,t)$ l'accélération d'une particule de fluide. Celle-ci est donnée par la dérivée particulaire du champ de vitesse eulérien,

$$\mathbf{a}(M,t) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}.$$

Montrez que $\mathbf{a}(M,t) = \mathbf{0}$.

(c) À partir de l'équation de Navier–Stokes

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mathbf{f}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{ext}} + \eta\Delta\mathbf{v},$$

où p est la pression et $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{ext}}$ les forces volumiques extérieures, montrez que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \eta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right). \end{cases}$$

(d) Démontrez soigneusement à partir de la question précédente que le profil de vitesse radial est donné par

$$v(r) = \frac{\delta p}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right).$$

Esquissez v en fonction de r.

(e) Calculez le débit volumique Q_{v} au travers du tuyau, et en déduire la loi de Poiseuille

$$\delta p = R_{\mathrm{h}} Q_{\mathrm{v}}, \tag{2}$$

où R_{h} est une constante que vous exprimerez en fonction des données du problème.

(f) À quelle loi bien connue en physique la loi de Poiseuille (2) est-elle similaire ?

Indications : Soient $f = f(r,\theta,z)$ une fonction scalaire et $\mathbf{A} = A_r(r,\theta,z)\,\hat{r} + A_\theta(r,\theta,z)\,\hat{\theta} + A_z(r,\theta,z)\,\hat{z}$ un champ de vecteur en coordonnées cylindriques (r,θ,z). On a

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{z} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$