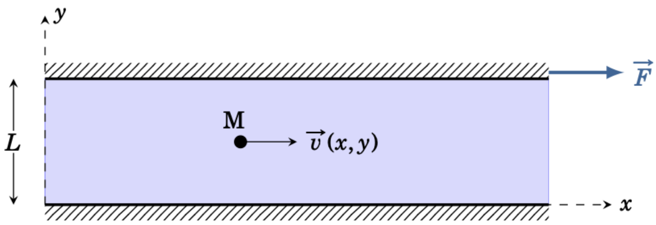
TD 7
Fluides visqueux

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan

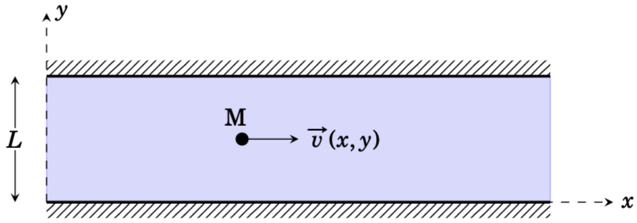
On considère un fluide newtonien incompressible de viscosité η, contraint entre deux plaques planes, infinies, parallèles, perpendiculaires à Oy et de cotes respectives $y = 0$ et $y = L$. La plaque de cote $y = 0$ est fixe alors que l'autre est animée d'une vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$. L'écoulement entre les plaques est supposé stationnaire et unidirectionnel de sorte que l'on peut le modéliser par le champ de vitesse $\vec{v} = \vec{v}(x, y)\,\vec{u_x}$. Par ailleurs, on néglige les effets de la pesanteur.



1. Montrer que la vitesse ne dépend pas de x. Que peut-on dire de l'accélération d'une particule de fluide ?
2. À partir de l'équation de Navier–Stokes, montrer qu'il n'est pas nécessaire d'imposer un gradient de pression suivant Ox pour que l'écoulement existe. On supposera donc que la pression est indépendante de x. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ en un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ en fonction de v_0, y et L.

Exercice 2 : Écoulement de Poiseuille plan

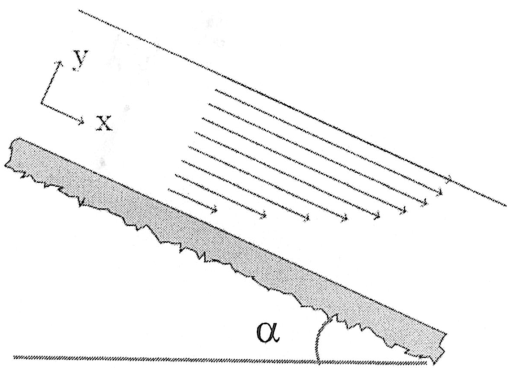
On reprend la situation de l'exercice précédent. Cependant, les deux plaques sont désormais *fixes*. L'écoulement est toujours supposé stationnaire et unidirectionnel. On le modélise par le champ de vitesse $\vec{v} = \vec{v}(y)\,\vec{u_x}$ et on note $p = p(x, y)$ le champ de pression. Enfin, on néglige les effets de la pesanteur.



1. À partir de l'équation de Navier–Stokes, montrer maintenant qu'un gradient horizontal de pression est nécessaire pour qu'il y ait écoulement et que ce gradient est constant (on appellera K cette constante).
2. Exprimer le champ de vitesse $\vec{v}(y)$. Calculer la vitesse maximale. Quel est le signe de K si la vitesse v est positive ?
3. Représenter le profil des vitesses $v(y)$ entre les deux plaques.
4. Soit Q le débit volumique à travers une section délimitée par les plaques ($y = 0$ et $y = L$) et par les plans $z = -h/2$ et $z = h/2$. Calculer Q et commenter le résultat.

Exercice 3 : Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné

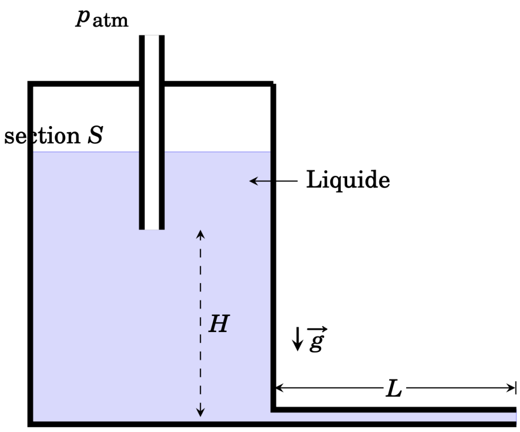
On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux sur un plan incliné, soumis aux seules forces de pesanteur. On note α l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. La direction Ox est la ligne de plus grande pente et on choisit Oy perpendiculaire à Ox dans le plan vertical. On note L l'épaisseur de l'écoulement supposé uniforme et p_0 la pression atmosphérique.



1. À partir de l'équation de Navier–Stokes, exprimer la pression $p(y)$ en fonction de p_0, g, ρ, α et L.
2. Donner l'expression du champ de vitesse $\vec{v}(y)$. Représenter ensuite le profil des vitesses et donner l'expression de la valeur maximale de la vitesse.
3. Donner l'expression du débit volumique entre les plans délimités par ($y = 0$, $y = L$) et ($z = 0$, $z = h$). En déduire l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction de la vitesse maximale trouvée à la question précédente.

Exercice 4 : Mesure de la viscosité de l'eau

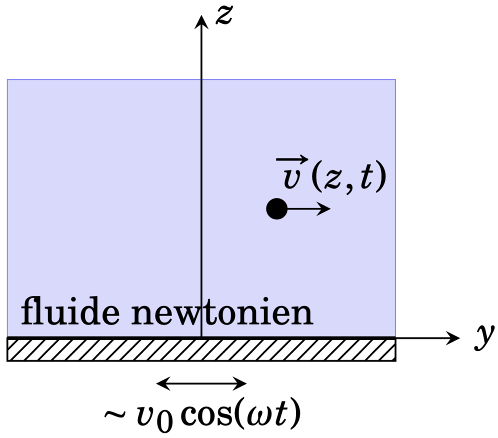
On cherche les conditions qui permettent de mesurer la viscosité de l'eau à partir du dispositif ci-dessous. Un tube horizontal de longueur L et de rayon R est relié à un récipient de section S. Un tube vertical plonge dans le réservoir en mettant celui-ci en communication avec l'atmosphère.



1. Supposons que les effets visqueux soient prépondérants dans le tube. Le débit Q est si faible que l'on peut considérer l'eau dans le réservoir à l'équilibre. En utilisant la loi de Poiseuille, montrer que le débit s'écrit
$$Q = \frac{\pi R^4 \rho g H}{8 \eta L}. \tag{1}$$
2. Ce débit varie-t-il au cours du temps ? Expliquer le rôle du tube vertical.
3. Tracer le débit Q en fonction de la viscosité η. Que se passe-t-il lorsque $\eta \to 0$? Discuter la pertinence du modèle.

4. On cherche à prévoir la valeur limite du débit quand $\eta \to 0$. On considère alors le fluide parfait. À l'aide de la relation de Bernoulli, exprimer le débit volumique Q en fonction de R, g et H.
5. À partir de ces résultats donner l'allure du graphe de Q en fonction de η. En déduire que pour pouvoir appliquer la loi de Poiseuille, il faut que la viscosité du fluide vérifie la condition
$$\frac{\eta}{\rho} \gg \frac{R^2}{8L}\sqrt{\frac{gH}{2}}.$$
6. Si l'on prend un tube horizontal de rayon $R = 1\,\mathrm{cm}$, $H = 50\,\mathrm{cm}$ et $L = 1\,\mathrm{m}$, la mesure de la viscosité de l'eau à partir de la loi (1) donnera t-elle une valeur fiable ?
Indication : La viscosité de l'eau est de l'ordre de $10^{-3}\,\mathrm{P}\ell$.

Exercice 5 : Diffusion visqueuse



Une plaque plane d'extension infinie retient un fluide newtonien de viscosité η et de masse volumique ρ constante. Un dispositif entraîne la plaque dans un mouvement oscillant de pulsation ω. La vitesse de la plaque s'écrit
$$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} = v_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{u_y}.$$
Pour des raisons de symétrie, le champ d'écoulement du fluide est de la forme $\overrightarrow{v} = v(z,t)\,\overrightarrow{u_y}$ et la pression est indépendante de x et y.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(z,t)$. On fera intervenir le coefficient de *viscosité cinématique* $\nu = \eta/\rho$.
2. Quelle est la nature physique de cette équation ? Quelle est la dimension de ν ? Que représente cette grandeur ?
3. Après avoir précisé les conditions aux limites, déterminer les solutions de cette équation en régime forcé. On fera intervenir le paramètre $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$.
Indication : Utiliser la notation complexe et chercher la solution sous la forme $\tilde{v} = \tilde{A}(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.
4. Que représente δ ?