Contrôle continu

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h30 min
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1

On considère une sphère de rayon R, chargée uniformément en volume, avec $\rho = \text{cst}$ la densité volumique de charge correspondante. Dans la suite, on utilisera les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, φ), et l'on place l'origine du repère au centre de la sphère.

(a) À l'aide des symétries du systèmes, argumentez brièvement du fait que le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{r}$.

(b) Question de cours : Énoncez le plus précisément possible le théorème de Gauss (sous sa forme intégrale) dans le cas général.

(c) Déterminez en tout point de l'espace le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ généré par la distribution sphérique de l'énoncé en fonction de la densité volumique de charge ρ, de la permittivité du vide ϵ_0, et du rayon R.

(d) On place une charge ponctuelle test Q à une distance $r = 2R$ du centre de la sphère. Quelle est la force de Coulomb $\mathbf{F}$ ressentie par cette charge. En supposant $\rho > 0$ et $Q < 0$, cette force est-elle attractive ou répulsive ? Sur un schéma, indiquez la direction de $\mathbf{F}$.

(e) Le champ électrostatique est-il continu en $r = R$? Si oui/non, pourquoi ?

(f) Esquissez $E(r)$ en fonction de r.

(g) Question de cours : Donnez la définition du potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ à partir du champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

(h) Montrez que le potentiel électrique a pour expression (on prendra pour origine du potentiel $r = \infty$)

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right), & r < R, \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\,\dfrac{R^3}{r}, & r \geqslant R. \end{cases}$$

(i) Esquissez $V(r)$ en fonction de r.

(j) En utilisant le fait que $\mathbf{E} = -\nabla V$, vérifiez votre réponse à la Question (c).
Indication : Pour une fonction scalaire $f(\mathbf{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ), on a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{\varphi}.$$

(k) On considère à présent que la sphère de rayon R porte une densité volumique de charge *non-uniforme*

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2},$$

avec k une constante. Recalculez le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ correspondant.

Exercice 2

On considère le demi-cercle de rayon R et de densité linéique de charge λ uniforme de la Fig. 1. Par un calcul *direct*, et en utilisant un système de coordonnées adaptées à la géométrie du problème (que vous préciserez sur un schéma), déterminez le champ électrostatique $\mathbf{E}$ en $x = y = 0$.

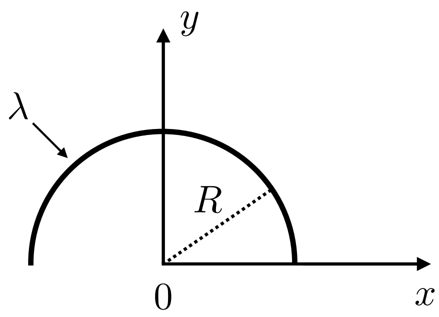

FIGURE 1

Exercice 3

On considère quatre charges ponctuelles (deux positives de charges $+q$, deux négatives de charges $-q$) disposées comme sur la Fig. 2 dans le plan $0xy$ aux quatre sommets d'un carré de demi-diagonale a.

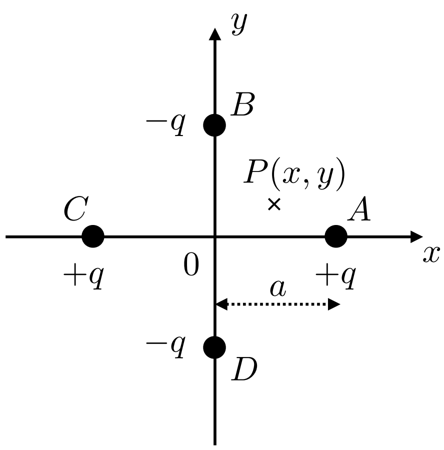

FIGURE 2

(a) Calculez le potentiel électrique $V(0, 0)$ à l'origine des coordonnées.

(b) Soit P un point quelconque du plan $0xy$ de coordonnées (x, y). Déterminez en fonction de x, y et a les longueurs des segments AP, BP, CP et DP.

(c) En déduire l'expression du potentiel électrique $V(x, y)$ généré par les quatre charges au point P. Vérifiez votre résultat à l'aide de la Question (a).

(d) On admettra que pour $x \ll a$ et $y \ll a$, le potentiel a pour expression

$$V(x, y) \simeq \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(x^2 - y^2\right).$$

En déduire le champ électrique $\mathbf{E}(x, y)$ au voisinage de l'origine et représentez le champ de vecteur correspondant dans le plan $0xy$.