

Mécanique Quantique

https://www.ipcms.fr/?page_id=13723

Aller dans: Mécanique Quantique (L3)

Les aspects historiques seront abordés avec beaucoup plus de détails au second semestre lors du cours optionnel: *Histoire de la Physique*

Mécanique Quantique

L3 - Physique 2025-2026

Paul-Antoine Hervieux
Unistra/IPCMS
hervieux@unistra.fr

1) Première phase de la MQ

1900-1914

Première phase de la MQ

Avant **1901**...

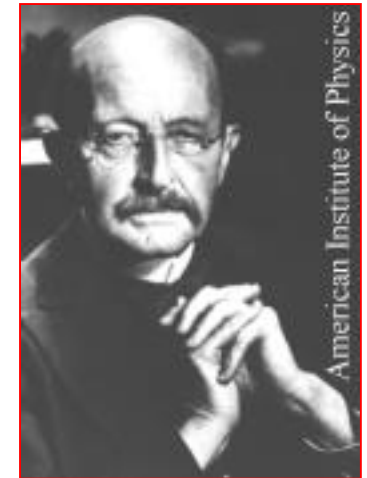
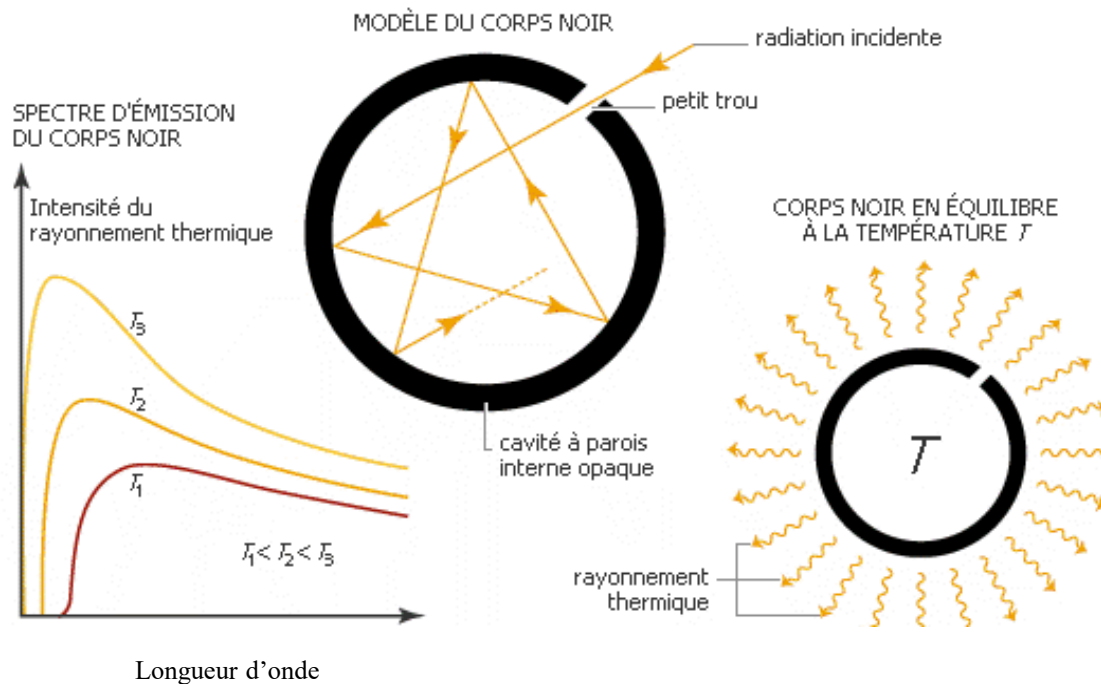
les lois de la physique classique étaient gouvernées
par des équations différentielles continues...(cf. mécanique analytique)

Lagrange
$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Hamilton
$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Première phase de la MQ

Le corps noir (1900)



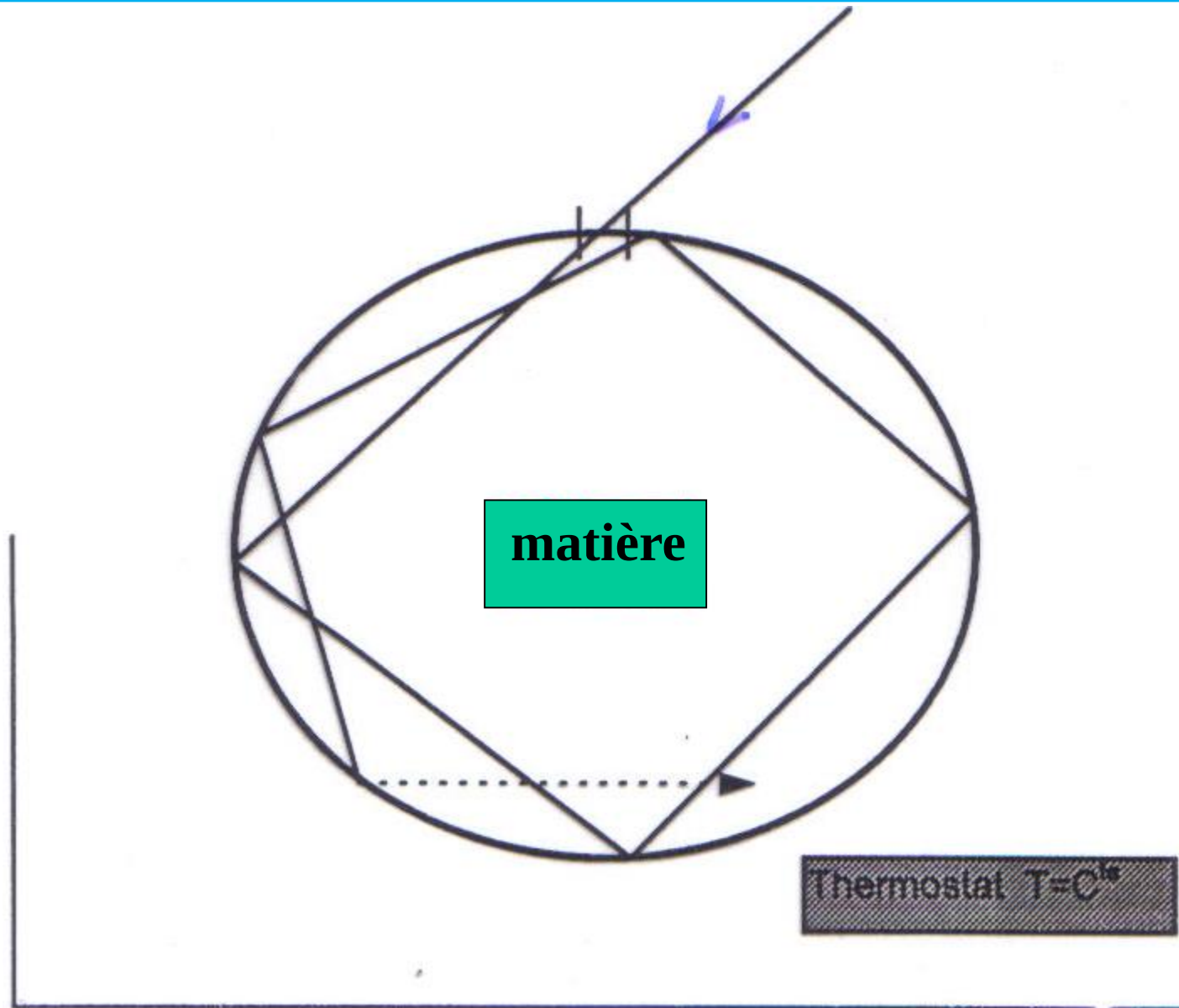
Max Planck
(1900)

Une révolution scientifique...
Un changement de paradigme (Thomas Kuhn)

Articles_fondateurs/Planck_corpsnoir.pdf



Première phase de la MQ

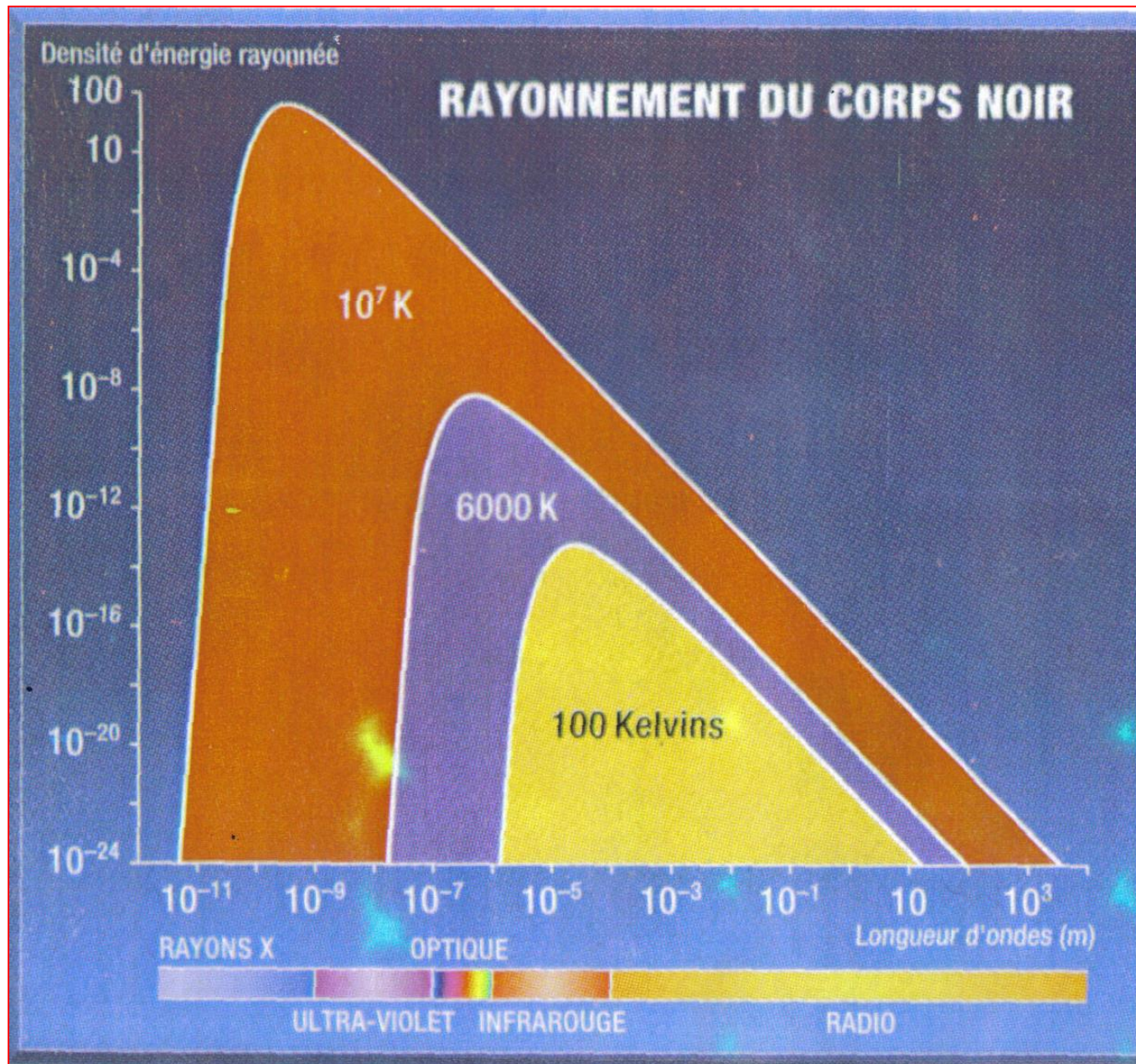


Première phase de la MQ

Max Planck (1858-1947)



Première phase de la MQ



Première phase de la MQ



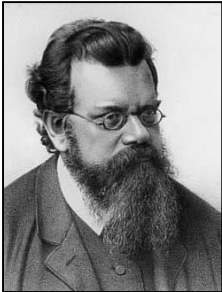
Acteurs et dates importantes du corps noir

✓ 1860 – Kirchhoff, dépend que de $T \rightarrow$ *loi universelle*



✓ 1879 – Stefan

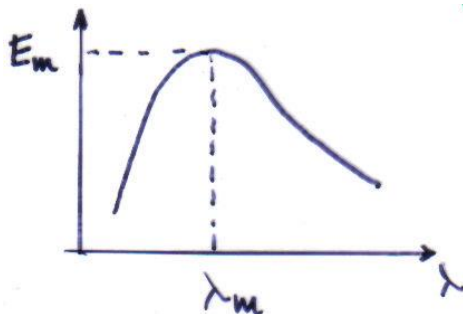
$$E(T) = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda = aT^4$$



✓ 1884 – Boltzmann

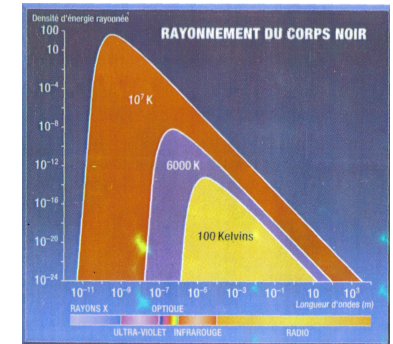


✓ Loi du déplacement de Wien (1894)



$$E_{\lambda}(\lambda, T) = T^5 f(\lambda T)$$

- $\lambda_m T = b = cte$ ← mesurée (Lummer 1900)
- $E_m = BT^5$



Première phase de la MQ



- ✓ Tentative de Wien (1896)

Maxwell-Boltzmann + Stefan-Boltzmann

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \exp(-c_2/\lambda T)$$

Ok pour λ petit



- ✓ Loi de l'équipartition de Rayleigh-Jeans (1900)

Chaque degré de liberté du champ (nombre de modes propres)

$$\Longleftrightarrow k_B T$$



$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

Ok pour λ grand

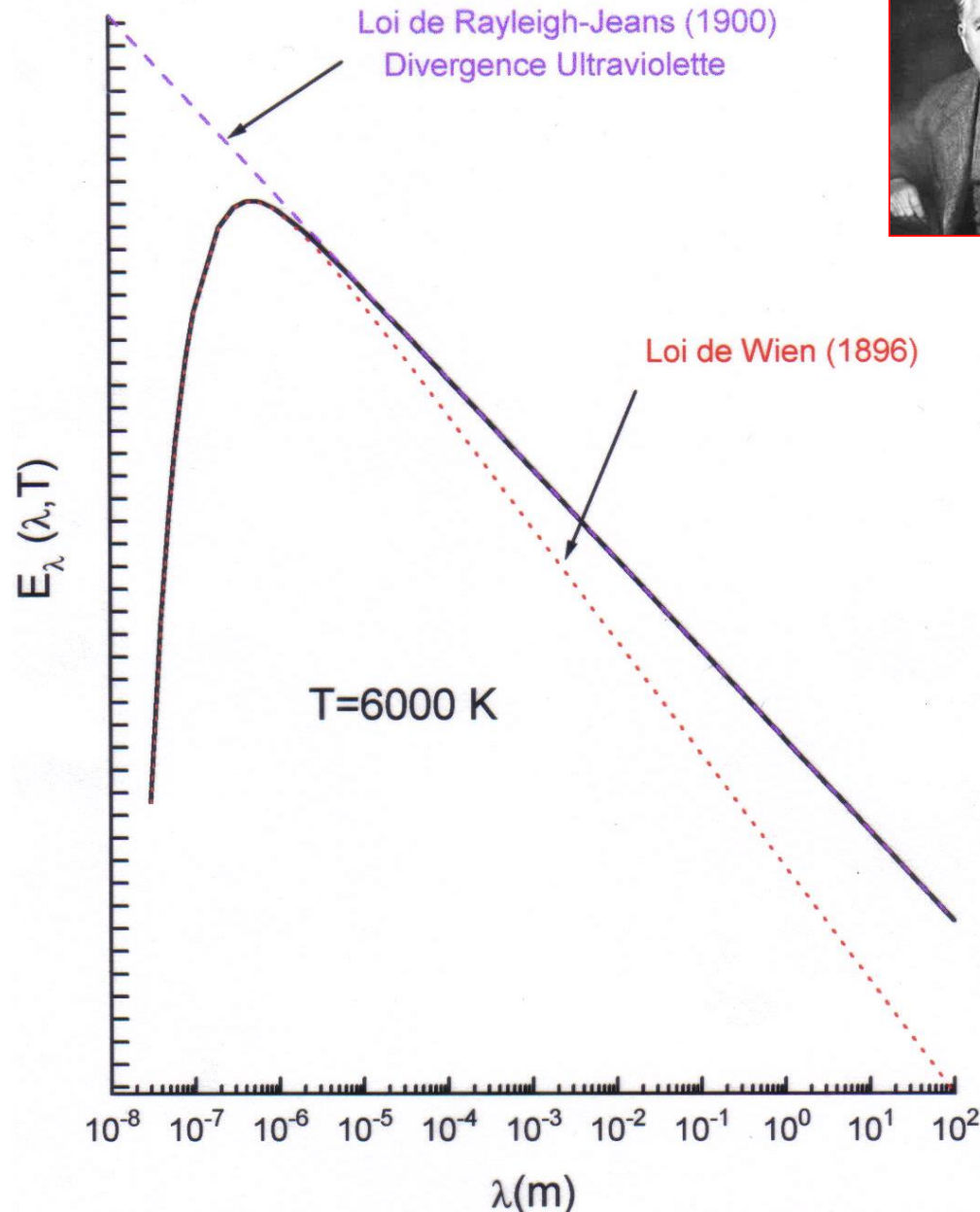
La catastrophe Ultraviolette

Première phase de la MQ

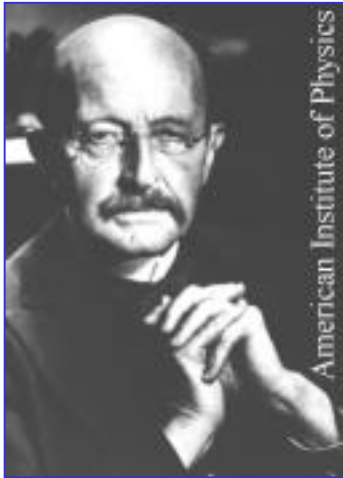
Jeans



Report on Radiation and
the Quantum Theory (1914)

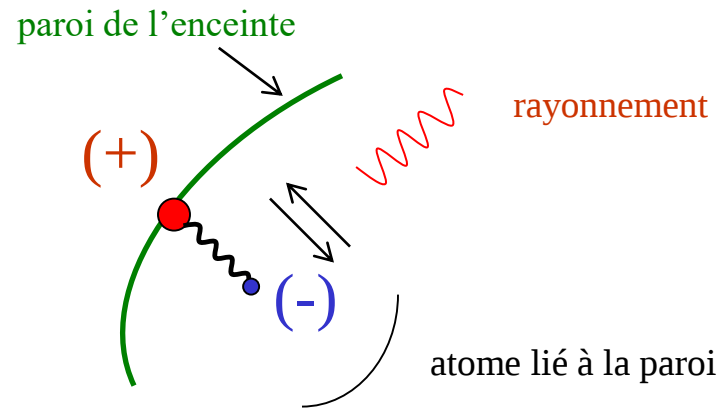


Première phase de la MQ



Max Planck
(1900)

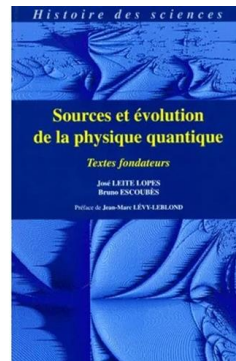
Les résonateurs de Planck



L'échange d'énergie entre un résonateur et le rayonnement se fait de **manière discontinue** → quantum d'énergie

Sources et évolution de la physique quantique,
textes fondateurs,
José Leites Lopes et Bruno Escoubès,
EDP Sciences

Articles_fondateurs/Planck_corpsnoir.pdf



$h\nu$

La démonstration de Planck

Il suppose que l'entropie et l'énergie totale du système sont des grandeurs thermodynamiques extensives. Ainsi on a:

- $S_N = Ns$
- $E_N = Ne = P\epsilon$

N : nombre d'oscillateurs (résonateurs) en équilibre thermique, P est un entier, s est l'entropie d'un oscillateur et e son énergie.

Puis, Il utilise la définition probabiliste (dans l'ensemble microcanonique) de L. Boltzmann

- $S_N = k_B \log W + cte$

où W est le nombre de possibilités de distribuer P quanta *indiscernables* parmi N résonateurs *discernables* (probabilité).

$$\implies s = f(e/\epsilon) \quad (1)$$

En utilisant la loi du déplacement de Wien il obtient que

$$\implies s = g(e/\nu) \quad (2)$$

(1) + (2) $\implies \epsilon = h\nu$ où h est la constante de Planck.

En utilisant la relation thermodynamique

- $\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial e}$

Première phase de la MQ

$$\implies e(T) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (3)$$

Finalement à partir de

- $E_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} e d\lambda$

il obtient la formule du corps noir (densité d'énergie rayonnée par unité de longueur d'onde:

$$E_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{ch}{k_B T \lambda}) - 1} \quad (4)$$

- $h \implies$ quanta
- $c \implies$ électromagnétisme
- $k_B \implies$ thermodynamique

h , $c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$, et k_B sont trois constantes universelles.

$h = 6.55 \times 10^{-34} \text{ J.s}$, et $k_B = 1.346 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ sont les valeurs numériques obtenues par Max Planck.

Elles sont à comparer avec les valeurs actuelles: $h = 6.6260693 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ et $k_B = 1.3806505 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

Première phase de la MQ

Table 1.1. Reviewed 2004 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). The set of constants excluding the last group (which come from the Particle Data Group) is recommended by CODATA for international use. The 1- σ uncertainties in the last digits are given in parentheses after the values. See the full edition of this *Review* for references and further explanation.

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s ⁻¹	exact ^a
Planck constant	h	6.626 0693(11) × 10 ⁻³⁴ J s	170
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 571 68(18) × 10 ⁻³⁴ J s = 6.582 119 15(56) × 10 ⁻²² MeV s	170 85
electron charge magnitude	e	1.602 176 53(14) × 10 ⁻¹⁹ C = 4.803 204 41(41) × 10 ⁻¹⁰ esu	85, 85
conversion constant	$\hbar c$	197.326 968(17) MeV fm	85
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 323(67) GeV ² mbarn	170
electron mass	m_e	0.510 998 918(44) MeV/c ² = 9.109 3826(16) × 10 ⁻³¹ kg	86, 170
proton mass	m_p	938.272 029(80) MeV/c ² = 1.672 621 71(29) × 10 ⁻²⁷ kg = 1.007 276 466 88(13) u = 1836.152 672 61(85) m_e	86, 170 0.13, 0.46
deuteron mass	m_d	1875.612 82(16) MeV/c ²	86
unified atomic mass unit (u)	(mass ¹² C atom)/12 (1 g)/(N _A mol)	931.494 043(80) MeV/c ² = 1.660 538 86(28) × 10 ⁻²⁷ kg	86, 170
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 817 ... × 10 ⁻¹² F m ⁻¹	exact
permeability of free space	μ_0	4 π × 10 ⁻⁷ N A ⁻² = 12.566 370 614 ... × 10 ⁻⁷ N A ⁻²	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 568(24) × 10 ⁻³ = 1/137.035 999 11(46) [†]	3.3, 3.3
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 325(28) × 10 ⁻¹⁵ m	10
(e ⁻ Compton wavelength)/2 π	$\lambda_c = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	3.861 592 678(26) × 10 ⁻¹³ m	6.7
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$	0.529 177 2108(18) × 10 ⁻¹⁰ m	3.3
wavelength of 1 eV/c particle	$\hbar c/(1 \text{ eV})$	1.239 841 91(11) × 10 ⁻⁶ m	85
Rydberg energy	$\hbar c R_\infty = m_e c^4/2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = m_e c^2 \alpha^2/2$	13.605 6923(12) eV	85
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 873(13) barn	20

Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 804(39) × 10 ⁻¹¹ MeV T ⁻¹	6.7
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 259(21) × 10 ⁻¹⁴ MeV T ⁻¹	6.7
electron cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^e/B = e/m_e$	1.758 820 12(15) × 10 ¹¹ rad s ⁻¹ T ⁻¹	86
proton cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^p/B = e/m_p$	9.578 833 76(82) × 10 ⁷ rad s ⁻¹ T ⁻¹	86

Première phase de la MQ

En **1901**, **Planck** démontre que l'hypothèse des quanta d'énergie est **suffisante** pour expliquer les phénomènes observés.

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{ch}{k_B T \lambda}\right) - 1}$$

- $h \implies$ quanta
- $c \implies$ électromagnétisme
- $k_B \implies$ thermodynamique

h et k_B sont obtenus à partir de l'expérience

$$h = 2\pi\hbar$$

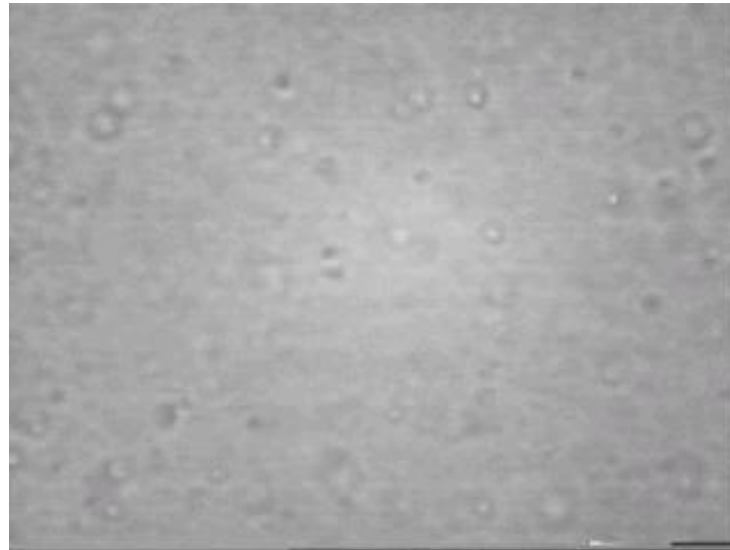
Première phase de la MQ

On prend un peu de hauteur...

Le Corps Noir (CN) est équivalent au Mouvement Brownien (MB) dans la mesure où par le biais de la **mécanique statistique** on peut avoir accès aux mécanismes microscopiques.

MB → collisions des atomes avec les particules en suspension

CN → échanges d'énergie entre le rayonnement et les atomes de l'enceinte



Première phase de la MQ

Planck – L'interaction rayonnement-matière

(cf. notes)

et si on les écrit les uns à la suite des autres ; si en dessous de chaque résonateur on inscrit le nombre d'éléments d'énergie qui lui sont attribués lors d'une répartition arbitraire, on obtient pour chaque complexion un symbole de la forme suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Ici on a supposé que $N = 10, P = 100$. Le nombre $\mathfrak{R}$ de toutes les complexions possibles est visiblement égal au nombre de toutes les configurations de chiffres possibles que l'on peut obtenir de cette manière pour la rangée inférieure, lorsque N et P sont fixés. Pour être précis, notons que deux complexions sont à considérer comme distinctes si présentant la même configuration de chiffres, ceux-ci sont rangés dans un ordre différent.

L'analyse combinatoire nous dit que le nombre de complexions possibles est :

$$\mathfrak{R} = \frac{N.(N+1).(N+2) \dots (N+P-1)}{1.2.3 \dots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

D'après la formule de Stirling on a, en première approximation :

$$N! = N^N,$$

et par suite, avec cette approximation :

$$\mathfrak{R} = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N.P^P}.$$

Loi de l'équipartition de Rayleigh-Jeans (1900)

On se propose de calculer le nombre de vibrations propres d'une onde électromagnétique dans une cavité de volume V . D'après les équations de Maxwell, on a dans le vide l'équation d'onde suivante:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $u = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

Si la cavité est un cube de côté L alors les conditions aux bords imposent: $u = 0$ aux bords du cube, ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned} \sin(k_x x)_{x=L} &= 0 \\ \sin(k_y y)_{y=L} &= 0 \\ \sin(k_z z)_{z=L} &= 0 \end{aligned}$$

et qui implique $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$, $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$, $k_z = \frac{n_z \pi}{L}$ avec $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$. Ceux sont les modes propres de vibration du champ *em* dans la cavité. La relation de dispersion des ondes *em* dans le vide est: $\omega = ck \implies \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{c\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$. C'est l'équation d'une sphère dans l'espace (n_x, n_y, n_z) . En posant $R^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ on obtient $R = \frac{L\omega}{c\pi}$.

Le nombre d'états (*i.e.* de modes propres) $\phi(\omega)$ ayant une pulsation plus petite que ω est:

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{6} R^3 = \frac{\pi}{6} \frac{L^3 \omega^3}{c^3 \pi^3} = \frac{V}{6\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3}. \quad (6)$$

Première phase de la MQ

Pour obtenir l'expression ci-dessus on ne prend en compte que le premier octant de la sphère car on impose $n_x, n_y, n_z > 0$.

La densité de modes est alors donnée par:

$$\rho(\omega) = \frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} . \quad (7)$$

On doit multiplier ce résultat par 2 pour tenir compte de la polarisation des oscillations (2 directions indépendantes, polarisation circulaire gauche et droite).

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega . \quad (8)$$

On a aussi: $\rho(\omega)d\omega = \rho(\nu)d\nu = \rho(\lambda)d\lambda$. Avec les relations $\omega = 2\pi\nu$ et $\lambda = c/\nu$ on obtient

$$\begin{aligned} \rho(\lambda)d\lambda &= \frac{8\pi}{\lambda^4} V d\lambda = N_\lambda V d\lambda \\ \rho(\nu)d\nu &= V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \end{aligned} \quad (9)$$

Première phase de la MQ

En supposant que l'énergie moyenne e de chaque mode de vibration (du champ em) à la température T est donnée par le théorème de l'équipartition $e = k_B T$ on obtient l'expression suivante pour la densité d'énergie du rayonnement:

$$E_\lambda(\lambda, T) = N_\lambda e = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T \quad (10)$$

où N_λ est le nombre de modes em par unité de volume et par unité de longueur d'onde.

L'expression (10) correspond à la *limite classique* de la formule de Planck. On a en effet:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(ch/k_B T \lambda) - 1} \right] = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T . \quad (11)$$

La constante h disparaît !!!

Rq: L'expression (10) correspond aussi à la limite des grandes longueurs d'onde ($\lambda \rightarrow \infty$) de la formule de Planck.

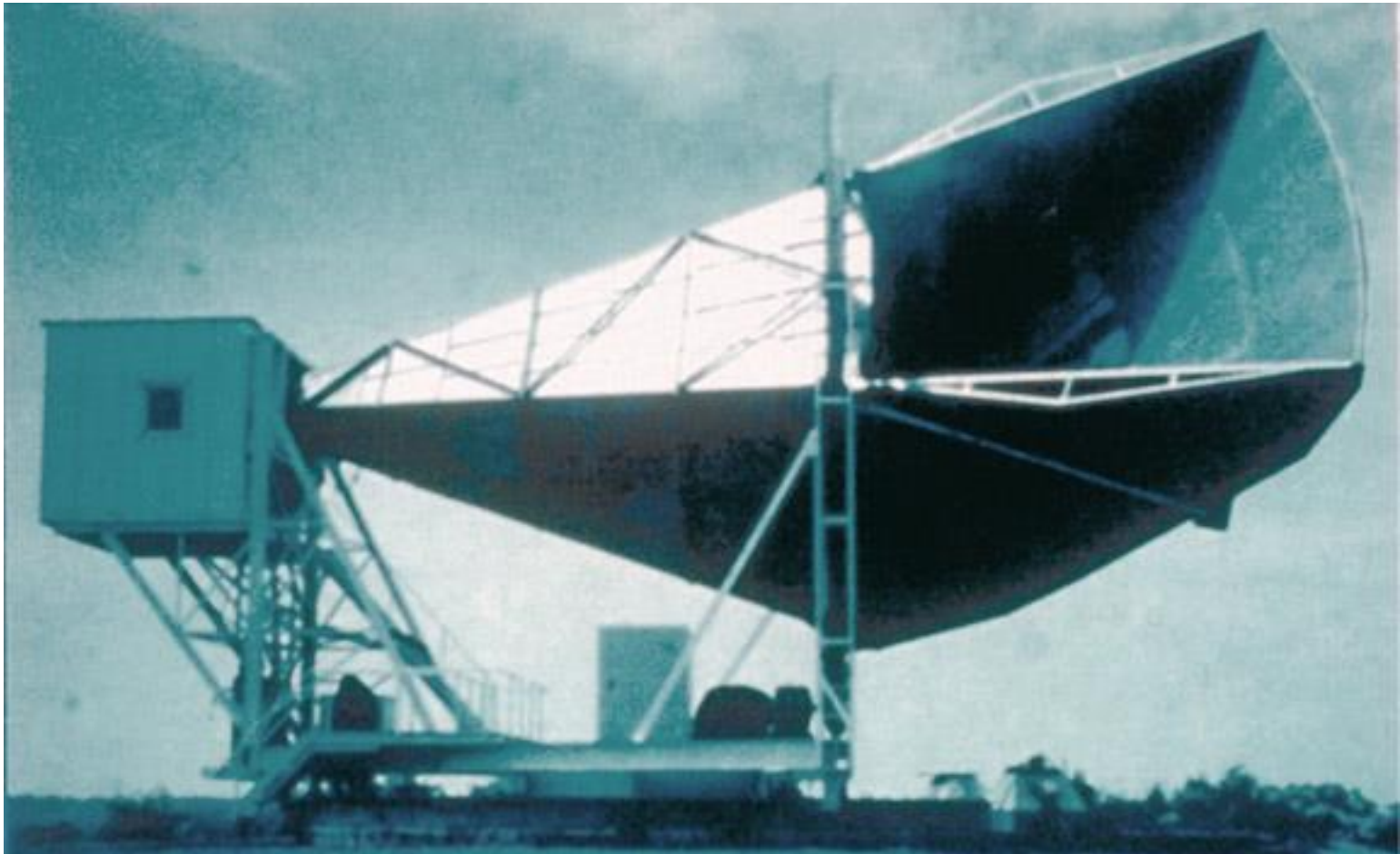
Première phase de la MQ

Le bruit primordial

Cosmic microwave background
(CMB)

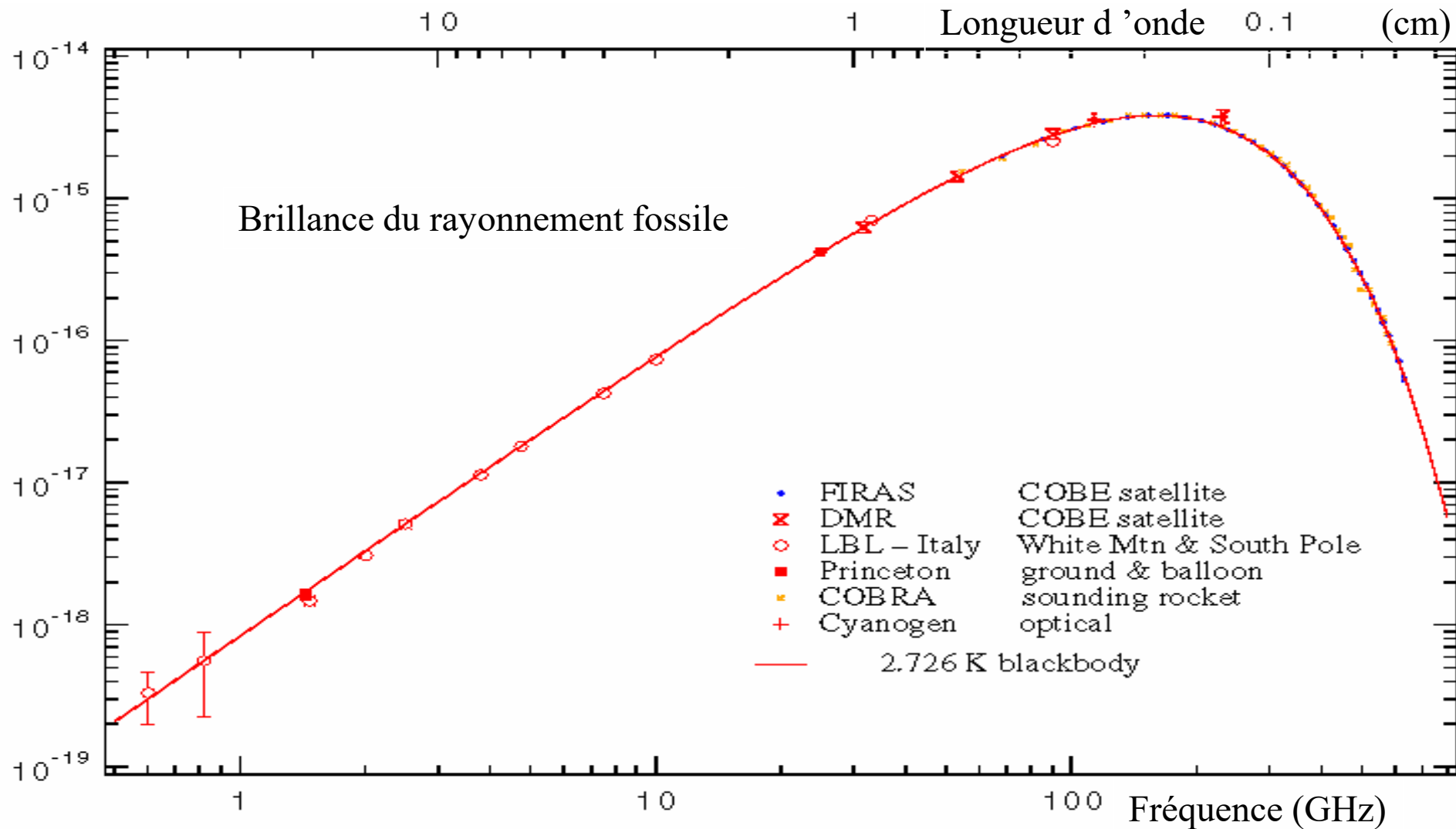
Première détection du rayonnement cosmologique

- Première détection du CMB en 1965 par Penzias & Wilson
« Excès de bruit »



Spectre du rayonnement fossile

Corps noir à $T = 2.72 \text{ K}$



***Nous baignons dans une lumière diffuse émise il y a une douzaine de milliards d'années,
alors que l'Univers était trois milliards de fois plus petit qu'aujourd'hui.
C'est l'une des preuves les plus solides de la justesse de la théorie du big bang...***

*Christian Magnan
Collège de France, Paris
Université de Montpellier II*

Notre œil ne perçoit que les rayonnement « visibles », c'est-à-dire ceux dont la longueur d'onde se situe en gros entre 0,4 et 0,8 micron. De ce fait nous avons tendance à penser que nous pourrions connaître l'Univers en nous en tenant à ce seul domaine spectral. Mais les techniques de ce siècle nous ont permis d'accéder de façon courante à d'autres classes de longueur d'onde, soit plus courtes (au-delà du violet, dans l'ultraviolet et plus loin), soit plus longues (en deçà du rouge, dans l'infrarouge et plus loin), et cette ouverture sur d'autres fenêtres nous a fait réaliser des découvertes marquantes. Ainsi nous détectons actuellement dans l'infrarouge une lumière diffuse émise peu après la naissance de l'Univers mais avant la formation des étoiles et des galaxies, à une époque où le monde devait consister en une masse gazeuse plus ou moins indifférenciée. Expliquons ce qu'il en est.

Selon la théorie du big bang, elle-même issue des équations de la théorie de la gravitation d'Einstein, l'Univers était à l'origine dans un état de température et de densité si élevées que le rayonnement était hautement prépondérant sur la matière. Celle-ci n'a pu se former que par la suite, lorsque la température fut devenue suffisamment basse (si l'on peut dire !), de l'ordre du milliard de degrés. Puis a débuté une phase au cours de laquelle les échanges ont contribué à maintenir un équilibre entre l'une et l'autre forme d'énergie.

Enfin, au bout de quelques centaines de milliers d'années, se produisit un événement qui explique la présence actuelle d'un rayonnement diffus : le milieu universel ne cessant sous l'effet de l'expansion de se diluer dans un volume de plus en plus vaste se trouva s'éclaircir assez brutalement en libérant d'un seul coup la lumière que la matière retenait prisonnière. Alors qu'auparavant la densité de matière était si forte que les photons, sans cesse absorbés dès qu'ils étaient émis, n'avaient pas pu nous parvenir, au contraire, une fois établie la transparence du monde à l'échelle universelle, la lumière se propagea librement sans rencontrer d'obstacle.

Lors du découplage entre matière et rayonnement qui donna lieu à cet éclaircissement de l'Univers, la température commune de ces deux constituants était d'environ **4500 degrés**. C'est dans ces conditions que fut émis le rayonnement que nous pouvons qualifier de « primordial » et qui, depuis quelque douze milliards d'années, poursuit sa route à travers le monde. Nous recevons aujourd'hui ceux de ses photons que la Terre intercepte. Seulement le rayonnement a changé d'aspect.

Rappelons-nous: la longueur d'onde d'un rayonnement suit fidèlement l'étirement de l'espace (comme l'intervalle entre les deux fournis suivait l'allongement de l'élastique). Par conséquent, les différentes radiations constituant la lumière fossile ont vu leur longueur d'onde augmenter en accompagnant l'espace dans son expansion. Plus précisément l'Univers aurait grossi dans ses dimensions linéaires d'un facteur 1500 environ (auquel correspond un facteur $1500 \times 1500 \times 1500$, soit plus de 3 milliards en volume) entre l'époque où le rayonnement a été émis et celle où nous le recevons. Les longueurs d'onde sont donc toutes **1500 fois plus grandes qu'à l'origine** : au départ exprimées en fractions de microns elles appartiennent aujourd'hui au domaine millimétrique.

Corrélativement - car qui dit longueur d'onde plus grande dit énergie plus petite et donc aussi température plus petite, dans la même proportion - le rayonnement observé correspond de nos jours à une température de trois degrés (2,7 si on tient à être précis), ce nombre trois provenant, d'après le raisonnement, de la réduction par le facteur 1500 (représentant l'effet de l'expansion) des 4500 degrés de départ. Vieux de douze milliards d'années puisque s'étant propagé pendant ce laps de temps mais aussi étonnamment jeune puisque témoin de phases fort précoces de l'histoire du monde, ce rayonnement fossile diffus constitue l'une des preuves éclatantes de la justesse de l'idée connue sous le nom de « big bang » selon laquelle notre monde est né dans un état de compression extrême pour entamer une prodigieuse expansion. Bien que le soubassement théorique de cette vision du monde soit fourni par la théorie de la relativité d'Einstein, l'invention du big bang est à porter au crédit de Alexandre Friedmann (1888-1925) et Georges Lemaître (1894-1966).

Pour avoir découvert ce rayonnement fossile en 1963, de façon fortuite d'ailleurs, **Penzias** et **Wilson** reçurent le prix Nobel. Ils projetaient d'utiliser pour des observations de radioastronomie une antenne chargée à l'origine de capter les signaux des satellites Echo et Telstar. L'instrument avait été conçu selon des caractéristiques spéciales qui le rendaient particulièrement apte à observer de très faibles émissions radio à des longueurs d'onde relativement peu courantes, de l'ordre de quelques centimètres, alors que les grands radio-télescopes classiques étaient prévus pour observer des longueurs d'onde plus grandes. Procédant au réglage et au calibrage de leur instrument ils s'aperçurent de la présence d'un bruit de fond radio parasite dont ils ne parvenaient pas à se débarrasser. Bien leur a pris de s'acharner sur la difficulté et de faire confiance à leur savoir-faire technique. Bien leur a pris aussi de faire part de leur problème à d'autres chercheurs qui, eux, pour les raisons théoriques exposées ci-dessus, pouvaient s'attendre plus ou moins à l'existence d'une telle émission dans cette région de longueur d'onde. S'il pouvait subsister quelques doutes dans l'identification du rayonnement à l'époque même où il fut découvert, ceux-ci sont dorénavant complètement levés. Étant donné l'importance de l'étude du fond diffus cosmologique, un satellite, COBE, lui a été entièrement consacré.

Le rayonnement cosmique fossile possède deux caractéristiques tout à fait exceptionnelles, que voici.

La première est l'extrême degré de précision avec laquelle la répartition de son intensité lumineuse en fonction de la couleur suit la loi théorique connue sous le nom de loi du « corps noir ». **C'est même le seul rayonnement de corps noir qu'on trouve dans la nature.** Cette loi de corps noir, appelée aussi loi de Planck est valable lorsque le rayonnement est emprisonné par la matière (d'où le nom de corps noir) et que de ce fait il se trouve en équilibre avec elle. Le caractère de corps noir du rayonnement cosmologique montre que les conditions nécessaires à la réalisation de cet équilibre (appelé équilibre thermodynamique) régnaient dans la mixture cosmique d'où provient ce rayonnement, à la manière décrite plus haut. Dans un état d'équilibre thermodynamique, le rayonnement est entièrement défini par *un seul* paramètre, à savoir sa température (qui se trouve alors justement la même que celle de la matière), ici de **2,7 degrés**.

Le deuxième trait exceptionnel du rayonnement cosmologique est son haut **degré d'isotropie**. Cela est incompréhensible dans le cadre de nos théories actuelles. En effet dans les modèles homogènes satisfaisant aux équations d'Einstein (modèles de Friedmann-Robertson-Walker) il se trouve que l'expansion est tellement rapide à l'origine que les différents points composant l'Univers n'ont pas eu le temps d'établir un lien causal entre eux, la lumière ne parvenant pas à rattraper l'expansion. Autrement dit, les différents points se comportent de façon indépendante et dans ces conditions on ne comprend pas comment a pu se réaliser l'isotropie constatée. Je pense personnellement qu'en tentant d'analyser l'origine de l'Univers nous touchons aux limites de validité de nos théories actuelles, lesquelles sont, sans surprise, insuffisantes sur certains points - comme est insuffisante n'importe quelle théorie au-delà de son domaine possible d'application. Pour avancer, il faut d'autres théories, que nous ne possédons pas.

Le rayonnement fossile occupe de ce point de vue une situation centrale en cosmologie : il est à la fois la confirmation éclatante et l'infirmité définitive de notre théorie. Nul doute que notre monde soit né de façon *singulière* et qu'il est en expansion, comme le prévoit le modèle du big bang, mais la description de la *singularité* originelle est impossible (à mon sens) sans un renouvellement théorique complet de nos idées.

CHAPITRE VI : L'HYPOTHESE DES QUANTA

On peut se demander si la Mécanique n'est pas à la veille d'un nouveau bouleversement ; récemment s'est réuni à Bruxelles un Congrès où étaient assemblés une vingtaine de physiciens de diverses nationalités, et, à chaque instant, on aurait pu les entendre parler de la Mécanique nouvelle qu'ils opposaient à la Mécanique ancienne ; or, qu'était-ce que cette Mécanique ancienne ? Était-ce celle de Newton, celle qui régnait encore sans conteste à la fin du XIX^e siècle ? Non, c'était la Mécanique de Lorentz, celle du principe de relativité, celle qui, il y a cinq ans à peine, paraissait le comble de la hardiesse.

Cela veut-il dire que cette Mécanique de Lorentz n'a eu qu'une fortune éphémère, qu'elle n'a été qu'un caprice de la mode et qu'on est sur le point de revenir aux anciens dieux qu'on avait imprudemment délaissés ? Pas le moins du monde, les conquêtes d'hier ne sont pas compromises ; en tous les points où elle s'écarte de celle de Newton, la Mécanique de Lorentz subsiste. On continue à croire qu'aucun corps mobile ne pourra jamais dépasser la vitesse de la lumière, que la masse d'un corps n'est pas une constante, mais qu'elle dépend de sa vitesse et de l'angle que fait cette vitesse avec la force qui agit sur lui, qu'aucune expérience ne pourra jamais décider si un corps est en repos ou en mouvement absolu, soit par rapport à l'espace absolu, soit même par rapport à l'éther.

Seulement à ces hardiesses, on veut en ajouter d'autres, et beaucoup plus déconcertantes. On ne se demande plus seulement si les équations différentielles de la Dynamique doivent être modifiées, mais si les lois du mouvement pourront encore être exprimées par des équations différentielles. Et ce serait là la révolution la plus profonde que la Philosophie Naturelle ait subie depuis Newton. Le clair génie de Newton avait bien vu (ou cru voir, nous commençons à nous le demander) que l'état d'un système mobile, ou plus généralement celui de l'univers, ne pouvait dépendre que de son état immédiatement antérieur, que toutes les variations dans la nature doivent se faire d'une manière continue. Certes, ce n'était pas lui qui avait inventé cette idée : elle se trouvait dans la pensée des anciens et des scolastiques, qui proclamaient l'adage : *Natura non facit saltus* ; mais elle y était étouffée par une foule de mauvaises herbes qui l'empêchaient de se développer et que les grands philosophes du XVII^e siècle ont fini par élaguer.

Eh bien, c'est cette idée fondamentale qui est aujourd'hui en question ; on se demande s'il ne faut pas introduire dans les lois naturelles des discontinuités, non pas apparentes, mais essentielles, et nous devons expliquer d'abord comment on a pu être conduit à une façon de voir aussi extraordinaire.

Congrès Solvay 1911



Théorie du rayonnement et quanta

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LA
THÉORIE DU RAYONNEMENT
ET LES QUANTA. 46579

RAPPORTS ET DISCUSSIONS

DE LA

Réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911.

Sous les auspices de M. E. SOLVAY.

Publiés par MM. P. LANGEVIN et M. de BROGLIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

En **1912**, **Henri Poincaré** démontre que l'hypothèse des quanta est **nécessaire et suffisante** pour expliquer les phénomènes observés



JOURNAL DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

SUR LA THÉORIE DES QUANTA ;

Par M. H. POINCARÉ.

§ 1. — INTRODUCTION.

On sait à quelle hypothèse M. Planck a été conduit par ses recherches sur les lois du rayonnement. D'après lui, l'énergie des radiateurs lumineux varierait d'une manière discontinue, et c'est ce qu'on appelle la théorie des Quanta. Il est à peine nécessaire de faire remarquer combien cette conception s'écarte de tout ce qu'on avait imaginé jusqu'ici ; les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans aucun doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton. Je ne parlerai pas des difficultés de détail, elles sautent à tous les yeux et M. Planck est le premier à s'en préoccuper.

Peut-on néanmoins échapper à cette conséquence ? Bien des personnes l'ont pensé ; lors du récent Congrès de Bruxelles, M. Nernst m'avait communiqué certaines suggestions ; il pensait qu'on pourrait rendre compte des faits, en supposant que les masses, au lieu d'être constantes comme dans la mécanique classique, au lieu de dépendre seulement de la vitesse, comme dans la mécanique nouvelle fondée sur le principe de relativité, soient dépendantes à la fois des composantes de la vitesse et de celles de l'accélération. Ce sont ces suggestions de M. Nernst qui m'ont déterminé à entreprendre ce travail, et je dois dire tout de suite que j'ai été conduit à répondre négativement à la question posée par l'éminent physicien.

M. Planck se représente le rayonnement des solides comme dû à un très grand nombre de résonateurs hertziens. Chacun de ces réson-

Solvay à Poincaré

15 juin 1911
Ernest Solvay
Bruxelles, 43 Rue des Champs Élysées

Confidentiel

Invitation à un "Conseil scientifique international pour élucider quelques questions d'actualité des théories moléculaires et cinétiques."

Très honoré Monsieur,

Selon toutes les apparences, nous nous trouvons en ce moment au milieu d'une évolution nouvelle des principes sur lesquels était basée la théorie classique moléculaire et cinétique de la matière.

D'une part cette théorie, en son développement raisonné, conduit à une formule de radiation dont la validité est en désaccord avec tous les résultats de l'expérience ; d'autre part, de cette même théorie découlent des thèses au sujet de la chaleur spécifique (lois sur la chaleur spécifique des gaz polyatomiques vis à vis des variations de la température, validité de la règle de Dulong et Petit jusqu'aux températures les plus basses) qui sont également réfutées par de nombreuses mesures.

Ainsi que l'on démontré notamment MM. Planck et Einstein, ces contradictions disparaissent lorsqu'on oppose certaines limites au mouvement des électrons et des atomes en cas d'oscillations autour d'une position de repos (doctrine des degrés d'énergie) ; mais cette interprétation s'éloigne à son tour si considérablement des équations du mouvement des points matériels employés jusqu'ici, que son acceptation entraînerait nécessairement et incontestablement une vaste réforme de nos théories fondamentales actuelles.

Le soussigné, quoique étranger aux questions spéciales de ce genre, mais animé d'un sincère enthousiasme pour tous les problèmes dont l'étude élargit, en la développant, notre connaissance de la nature, a pensé qu'un échange de vues écrit et verbal entre des chercheurs s'occupant plus ou moins directement de ces questions, pourrait, sinon amener une décision définitive, du moins frayer la voie, par une critique préparatoire, à la solutions de ces problèmes. Un grand pas dans la voie du développement de l'atomisme serait déjà fait si l'on pouvait établir clairement lesquelles de nos interprétations moléculaires et cinétiques sont d'accord avec les résultats de l'observation et lesquelles devront au contraire subir une transformation intégrale.

Dans ce but, le soussigné vous propose de participer à un "Conseil scientifique", qui se tiendrait à Bruxelles, du dimanche 29 Octobre au samedi 4 Novembre 1911, en réunissant en Comité restreint quelques professeurs éminents.

Ce Conseil serait composé comme suit :

Président : M. Lorentz (Hollande) ;

Secrétaires : MM. R. Goldschmidt (Belgique), de Broglie (France) ;

Membres : MM. Jeans, Larmor, lord Rayleigh, Rutherford, Schuster, J.J. Thomson (Angleterre) ;

Nernst, Planck, Rubens, Sommerfeld, Warburg, W. Wien (Allemagne) ;

Brillouin, Mme Curie, Langevin, Perrin, H. Poincaré (France) ;

Einstein, Hasenöhl (Autriche)

Kamerlingh Onnes, Van der Waals ; (Hollande)

Knudsen (Danemark)

Les sujets de conférence traités seraient les suivants :

1 - Dédution de la formule de Rayleigh sur la radiation.

2 - Comparaison de la théorie cinétique des gaz parfaits avec les résultats de l'expérience.

3 - Application de la théorie cinétique aux émulsions.

4 - La théorie cinétique de la chaleur spécifique d'après Clausius, Maxwell et Boltzmann.

5 - La formule de radiation et la théorie des degrés d'énergie ("Quantenhypothese").

6 - Chaleur spécifique et théorie des degrés.

7 - Application de la théorie des degrés à une série de problèmes de nature physique.

8 - Application de la théorie des degrés à une série de problèmes de nature physico-chimique et chimique.

Pour chacune de ces questions nous prierons un membre particulièrement compétent de bien vouloir écrire un rapport préalable. Ces rapports, écrits en français, en allemand ou en anglais, seront imprimés et distribués aux divers membres, si possibles avant la fin de Septembre ; plus tard ils seront réunis en un volume, avec le compte-rendu des discussions qu'ils provoqueront.

N'étant pas homme de science spécialisée, je ne pourrai traiter des sujets ci-indiqués ; mais, ayant fait de longue date une étude générale de la gravité en vue d'en tirer des conséquences sur la constitution de la matière et de l'énergie, je me propose d'en communiquer un résumé à la séance d'ouverture du "Conseil", estimant que certains de ses travaux pourraient éventuellement en être influencés.

Pour permettre à tous les invités de participer, j'offre à chacun d'eux une indemnité de 1000 francs pour frais de voyage.

Les demandes éventuelles et les réponses doivent être adressées à Monsieur le Prof. Dr W. Nernst, Am Karlsbad 26^a, Berlin W. 35.

J'espère pouvoir compter sur votre collaboration et vous prie d'agréer, très honoré Monsieur, l'assurance de ma haute considération.

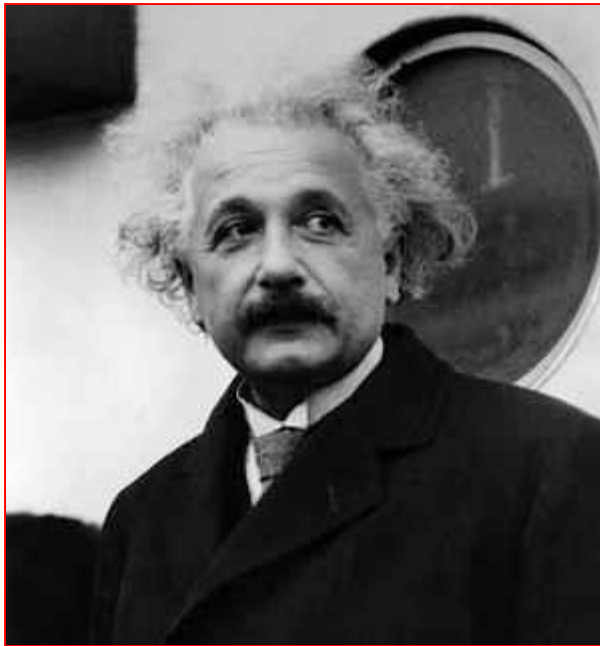
E. Solvay

**Black-Body
Theory and
the Quantum
Discontinuity,
1894-1912**

THOMAS S. KUHN



1905: Une année de folie ...



- Effet photoélectrique (Nobel en 1921)
- Mouvement brownien
- Théorie de la relativité restreinte

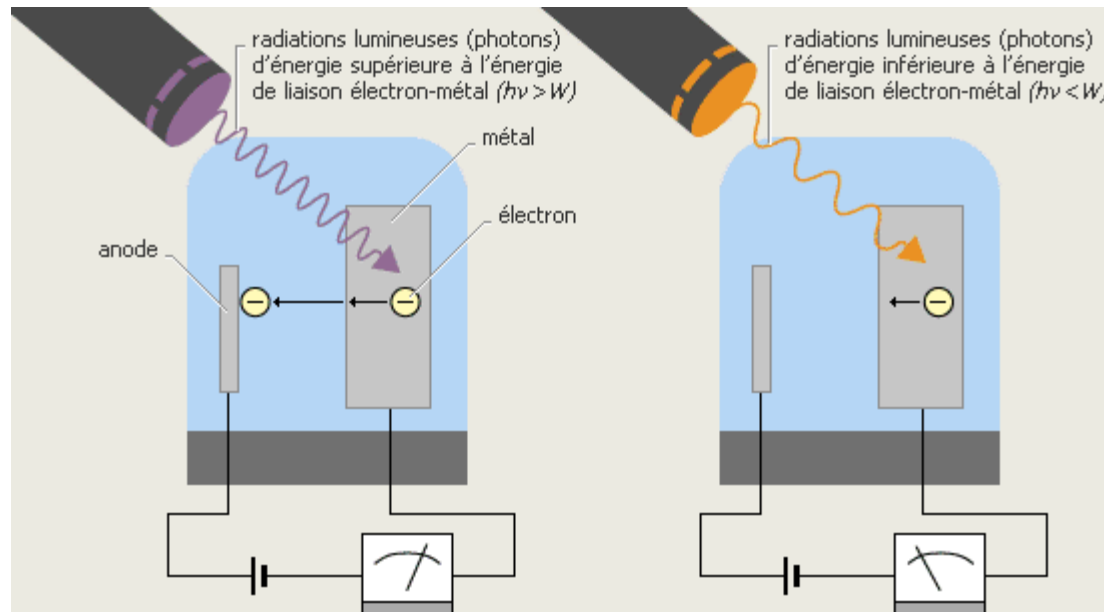
Albert Einstein (1879-1955)

L'effet photoélectrique

Première facette de la dualité onde-corpuscule avant
Louis de Broglie en **1924 (il y a 100 ans !)**



- Le champ électromagnétique est *quantifié*
- Les quanta de ce champ sont les **photons**



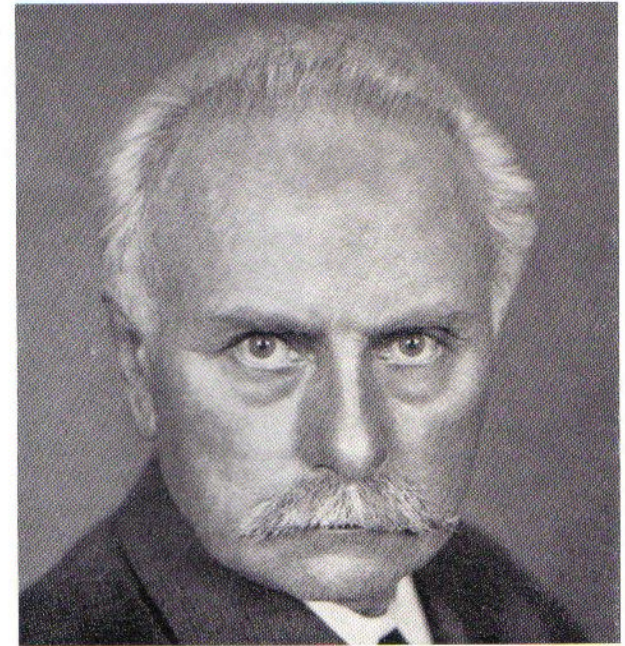
(Article traduit en français sur le site...Articles_fondateurs/Einstein_photo.pdf)

Aspect *corpusculaire* de la lumière: énergie $\hbar\omega$

Un coup de l'histoire: les seules références de l'article de 1905 ...



Philipp Lenard · 1905



Johannes Stark · 1919

Prix Nobel

In 1924 **Stark**, began making speeches supporting Adolf Hitler. **Stark** shared Hitler's racist views and attacked the work of Jewish scientists in Germany, claiming that they were unconcerned with "scientific objectivity".

Stark joined the Nazi Party in 1930 and over the next few years he joined with another German physicist, **Philipp Lenard**, to integrate physics with fascism. After Hitler came to power in 1933 **Stark** was appointed president of the Reich Physical-Technical Institute and head of the German Research Association.

In his book, *Nationalsozialismus und Wissenschaft* (1934) **Stark** argued that the scientist's first duty was to the nation. He denounced theoretical physics and stressed the need for research to be carried out that would help industry and arms production. **Stark** also argued that leading scientific positions in Nazi Germany should only be held by ethnic Germans.

Stark was particularly critical of Jewish scientists such as **Albert Einstein**. When **Werner Heisenberg** defended Einstein and his theory of relativity **Stark** wrote an article in the Nazi journal *Das Schwarze Korps*, where he described **Heisenberg** as a "White Jew".

After the Second World War **Stark** was arrested and sentenced to four years' imprisonment by a denazification court in 1947. **Johannes Stark** died on 21st June, 1957.



Das Schwarze Korps, journal de propagande Nazi

Himmler's letter to Heisenberg (English translation)

Very distinguished Professor Heisenberg !

Only today can I answer your letter of July 21, 1937, in which you direct yourself to me because of the article of Professor Stark in 'Das Schwarze Korps'.

Because you were recommended by my family I have had your case investigated with special care and precision.

I am glad that I can now inform you that I do not approve of the attack in 'Das Schwarze Korps' and that I have taken measures against any further attack against you.

I hope that I shall see you in Berlin in the fall, in November or December, so that we may talk things over thoroughly man to man.

With friendly greetings,

Heil Hitler!

Your,

H. Himmler

P.S. I consider it, however, best if in the future you make a distinction for your audience between the results of scientific research and the personal and political attitude of the scientists involved.

Les quanta de lumière et l'effet photoélectrique

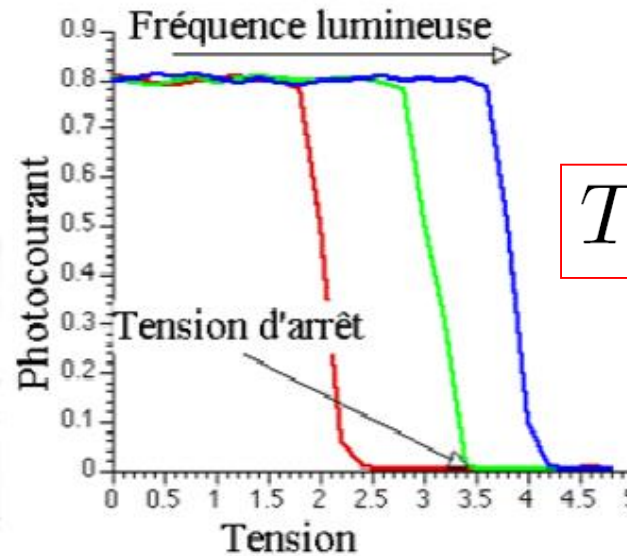
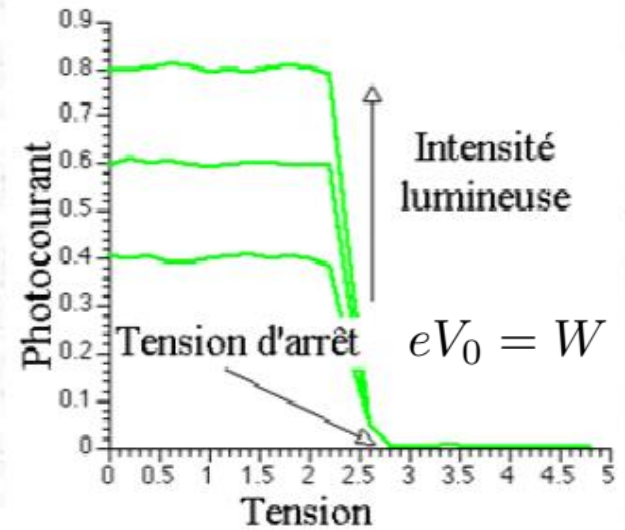
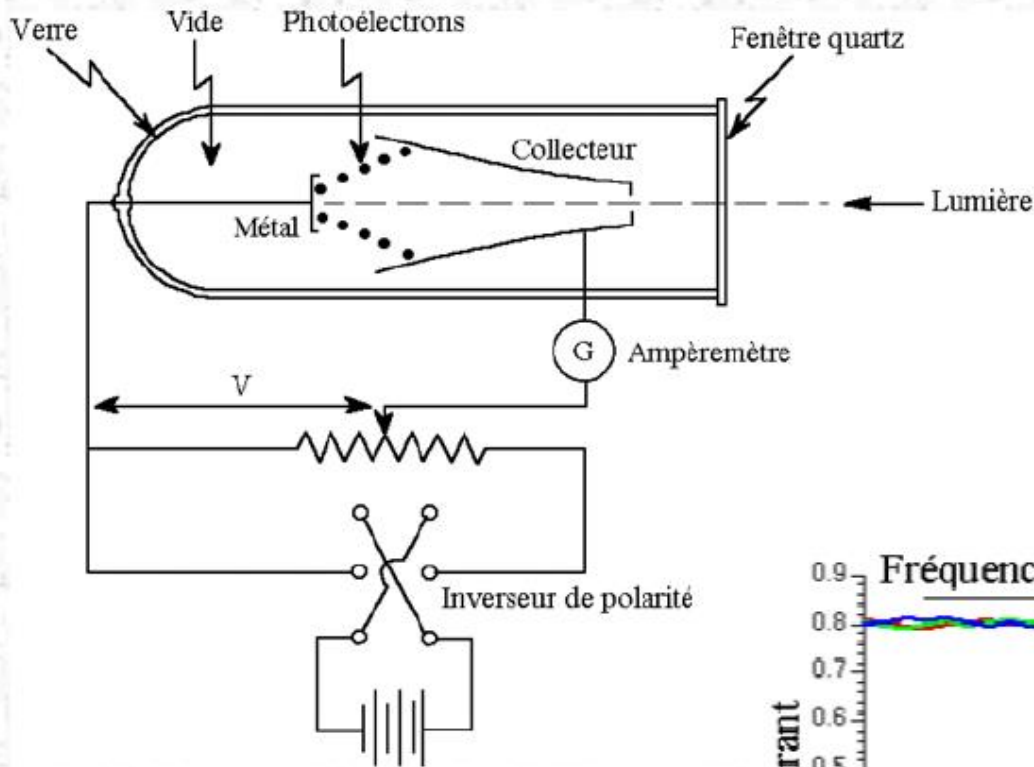
La microstructure de la lumière

"Dès lors que l'entropie d'un rayonnement monochromatique dépend du volume de la même façon que s'il était un milieu discontinu consistant en quanta d'énergie de grandeur $h\nu$, le pas évident à franchir est d'investiguer si les lois de l'émission et de la transformation de la lumière sont telles qu'elles puissent être interprétées ou expliquées en considérant que la lumière consiste en de tels quanta. Nous examinerons cette question dans ce qui suit."

Einstein, Ann. D. Phys. 17, 132, 1905

Effet Photoélectrique

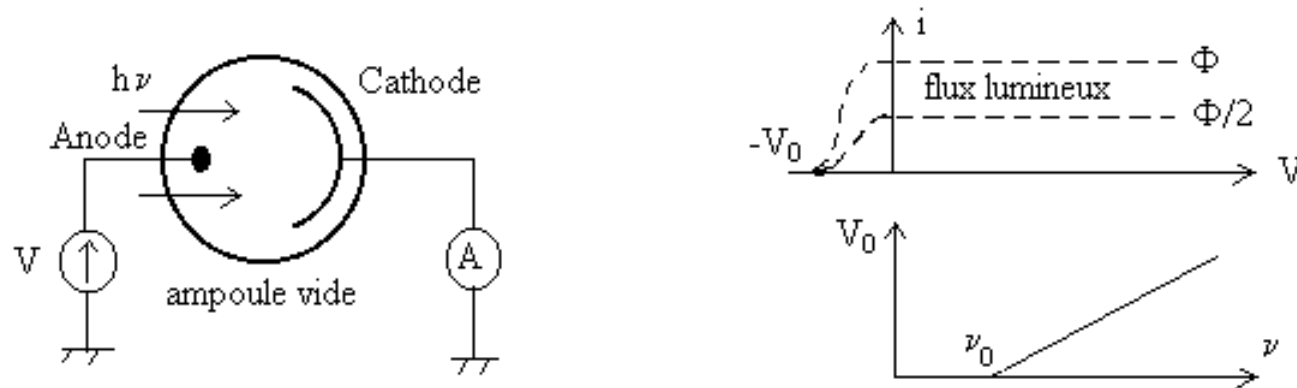
Seuil indépendant de l'intensité



$$T = h\nu - W$$

$$\nu > \nu_0$$

$$V_0 = \frac{h(\nu - \nu_0)}{e}$$



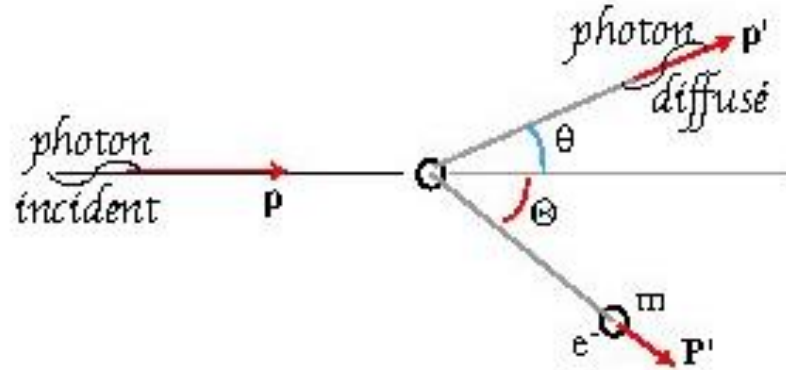
L'interprétation donnée par Albert Einstein fait appel à la collision inélastique d'un photon sur les électrons libres du métal constituant la cathode. Le photon est absorbé par l'électron de telle sorte que $h\nu = W + T = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$ où v est la vitesse d'extraction de l'électron.

$W = h\nu_0$ est l'énergie nécessaire pour extraire un électron libre du métal. Cette énergie d'extraction (travail de sortie) est faible, toujours inférieure à l'énergie d'ionisation d'un atome du métal: il s'agit bien d'électrons libres qui sont expulsés. Il n'y a pas d'émission secondaire de lumière ce qui prouve qu'il s'agit bien de l'absorption du photon incident.

- Si $\nu \leq \nu_0$, il n'y a pas de courant quelque soit le potentiel accélérateur.
- Si $\nu > \nu_0$, il est possible d'arrêter le courant électrique en portant l'anode à un potentiel négatif $-V_0$ tel que $eV_0 = h(\nu - \nu_0)$.

Pour un potentiel V accélérateur positif augmentant, on atteint un courant de saturation proportionnel au flux lumineux (au nombre de photons incidents).

Effet Compton (1923)



Arthur H. Compton

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

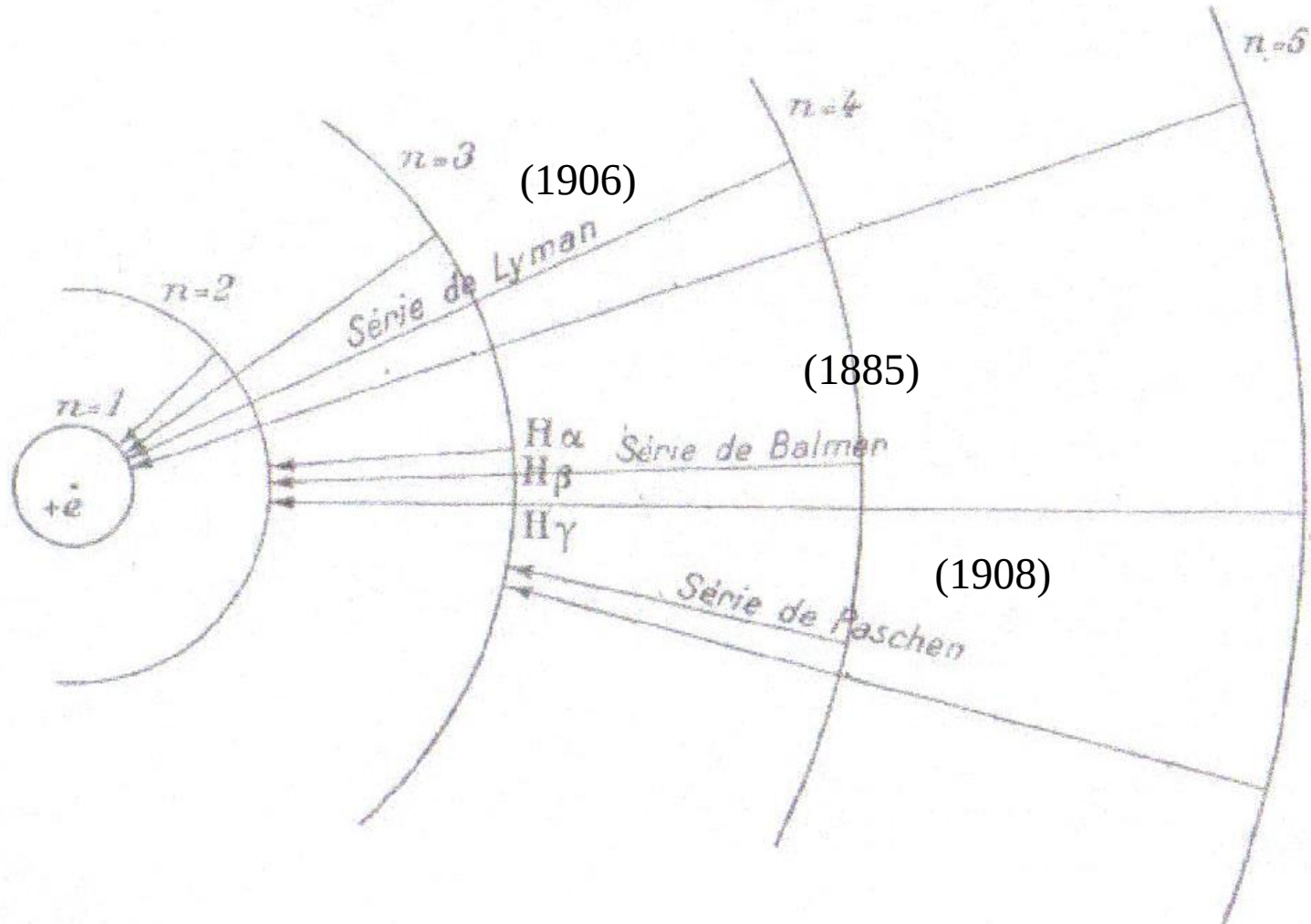
Conservation de la quantité de mouvement

Aspect corpusculaire de la lumière: quantité de mouvement

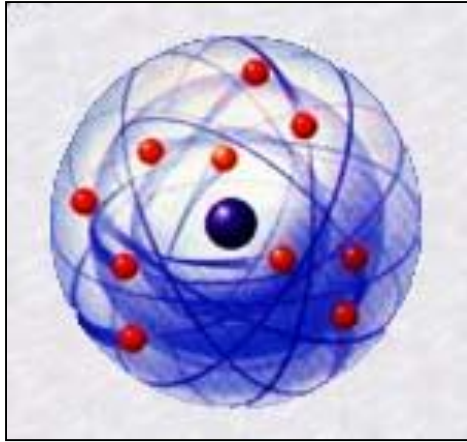
$$p = \frac{h\nu}{c}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Première fois que l'on rencontre la relation de De Broglie (1924) !

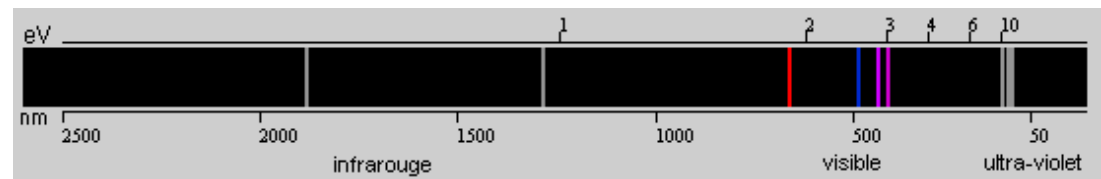
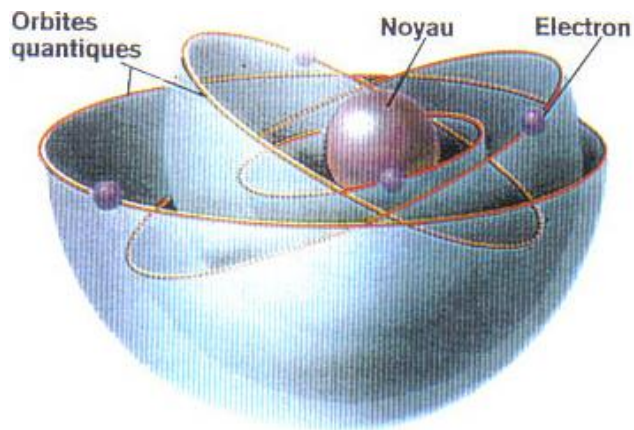
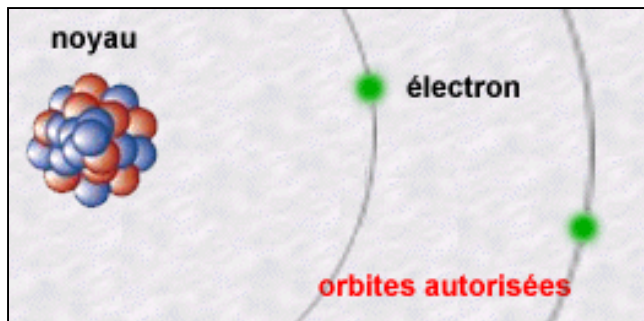


Niels Bohr (1885-1962)



Niels Bohr

(1913)



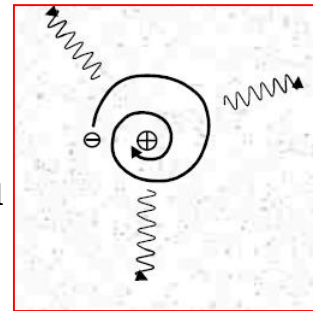
Institut Niels Bohr



✓ Selon le modèle de **Bohr**, l'électron dans l'atome d'hydrogène est confiné sur certaines orbites circulaires.

✓ Chaque passage d'une orbite à l'autre s'accompagne de **l'émission** ou de **l'absorption** d'un photon. Ces principes imposent que les électrons d'un atome ne peuvent s'assembler autour du noyau que selon certains modes bien définis : *les états quantiques*.

✓ Ainsi, pour **Bohr**, l'électron n'est plus libre de **spiraler** de plus en plus près du noyau, car il existe une orbite de plus basse énergie autour du noyau au-delà de laquelle l'électron ne peut plus descendre



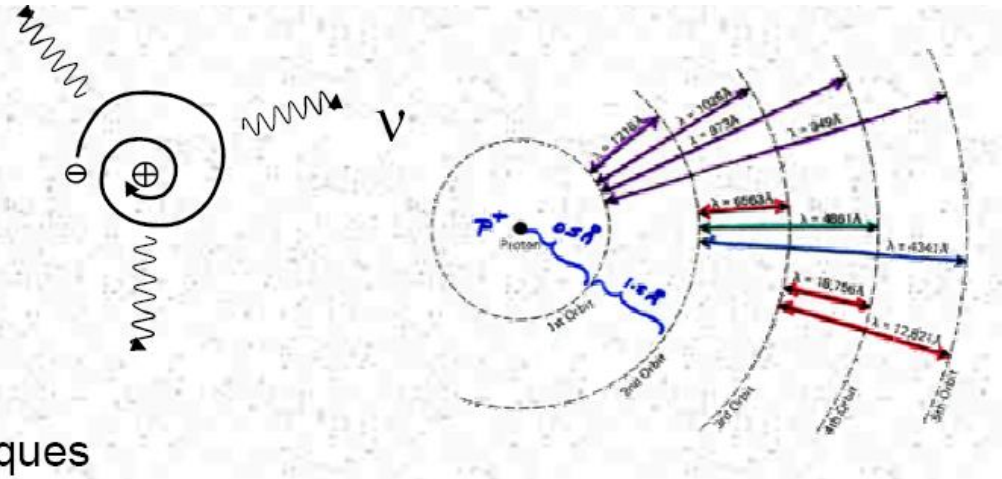
✓ Au fil des années qui suivirent, le modèle de **Bohr** continua à être étudié et perfectionné. Seules quelques questions à son sujet se faisaient entendre:

- *Quelles causes provoquent le changement d'orbites des électrons ?*
- *Peut-on prédire les instants où s'effectuent ces « sauts quantiques » ?*

☐ Toute particule accélérée rayonne

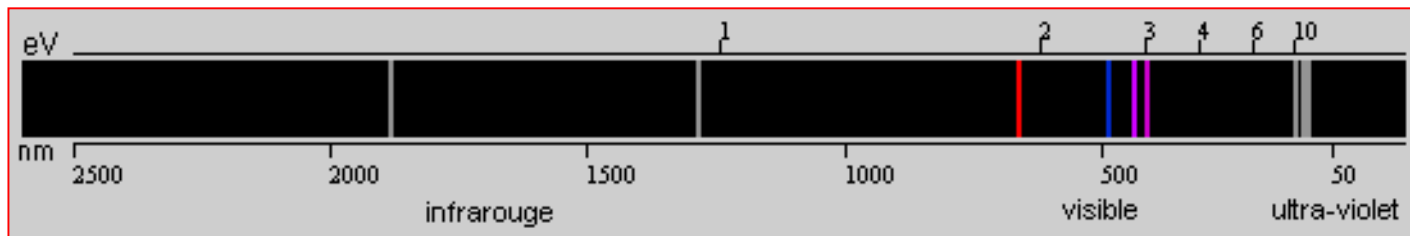
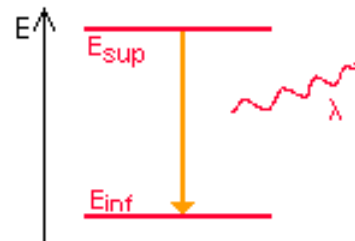
Problème de la stabilité des atomes !

☐ Caractère discret des spectres atomiques



(cf. Mécanique analytique)

Quantification de l'action → principe de moindre action



principe de moindre action

✓ Le principe de moindre action est un des grands principes de la Physique, il englobe:

- le principe de **Fermat** pour l'optique
- le principe de moindre action en mécanique



✓ Si l'énergie est constante on a le principe de **Maupertuis**

✓ La trajectoire réelle correspond à l'action minimale, soit:



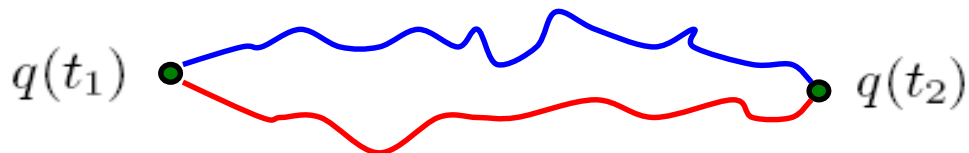
(1698-1759)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

L : lagrangien du système = $T - U$

S : action

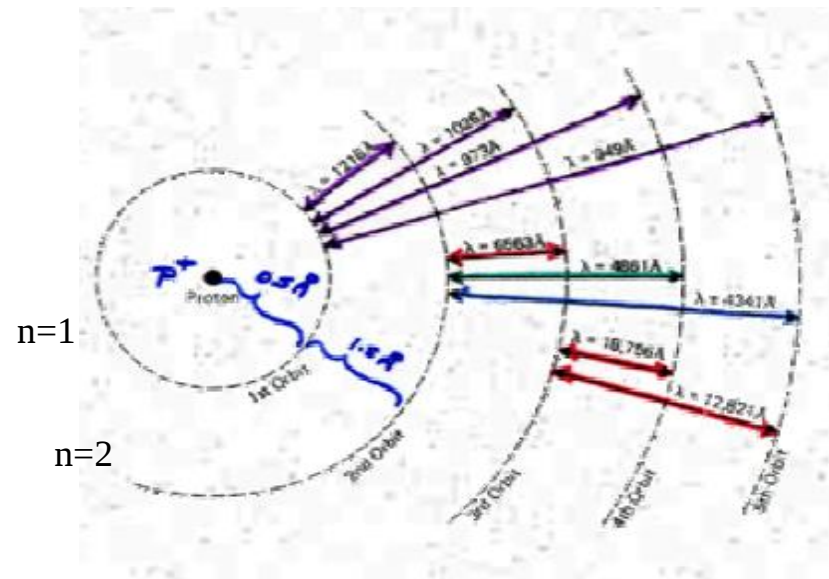
$$\rightarrow \delta \int \vec{p} \cdot d\vec{l} = 0$$



Niels Bohr en 1913 postule la quantification de l'action

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = nh \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Ce principe est compatible avec l'hypothèse des quanta de Planck



ON THE QUANTUM THEORY OF LINE-SPECTRA

N. BOHR

DEDICATED TO THE MEMORY OF MY VENERATED TEACHER
PROFESSOR C. CHRISTIANSEN
October 9, 1843 † November 28, 1917

INTRODUCTION

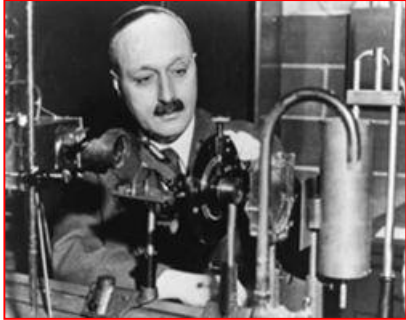
In an attempt to develop certain outlines of a theory of line-spectra based on a suitable application of the fundamental ideas introduced by Planck in his theory of temperature-radiation to the theory of the nucleus atom of Sir Ernest Rutherford, the writer has shown that it is possible in this way to obtain a simple interpretation of some of the main laws governing the line-spectra of the elements, and especially to obtain a deduction of the well known Balmer formula for the hydrogen spectrum ¹⁾. The theory in the form given allowed of a detailed discussion only in the case of periodic systems, and obviously was not able to account in detail for the characteristic difference between the hydrogen spectrum and the spectra of other elements, or for the characteristic effects on the hydrogen spectrum of external electric and magnetic fields. Recently, however, a way out of this difficulty has been opened by Sommerfeld ²⁾ who, by introducing a suitable

Editor's note. This paper is the Introduction and Part I (pp. 1–36) of the paper *On the Quantum Theory of Line-spectra*, which was first published (1918–1922) in the *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, Copenhagen, Section des Sciences, 8me série t. IV, n° 1, fasc. 1–3 (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. Afd. 8. Række, IV.1, 1–3). The Introduction was signed 'Copenhagen, November 1917.' The titles of Parts II and III, which are not reproduced here, are respectively *On the hydrogen spectrum* and *On the spectra of elements of higher atomic number*.

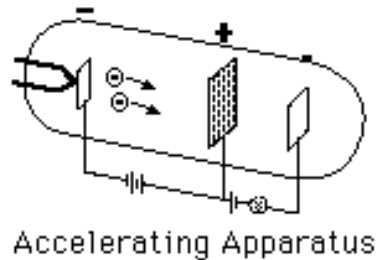
¹⁾ N. Bohr, *Phil. Mag.* **26** (1913) 1, 476, 857; **27** (1914) 506; **29** (1915) 332; **30** (1915) 394.

²⁾ A. Sommerfeld, *Ber. Akad. München*. 1915, pp. 425, 459; 1916, p. 131; 1917 p. 83. *Ann. d. Phys.* **51** (1916) 1.

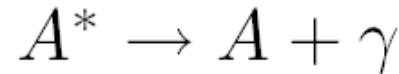
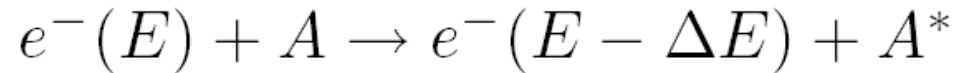
Diffusion inélastique d'électrons lents sur une vapeur atomique (Excitation d'un atome par impact électronique)



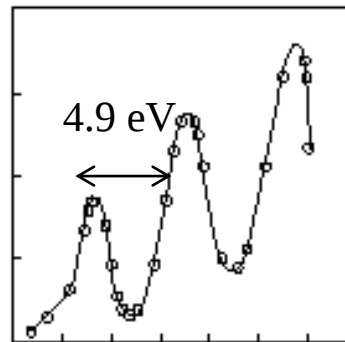
James Franck



(1914)



Gustav Ludwig Hertz
(neveu de Heinrich Hertz)



Franck-Hertz Data

*Nobel prize
in physics,
1925

Émission dans l'ultraviolet à **254 nm** = 4.9 eV pour le **mercure**

Si $E < 4.9 \text{ eV}$ pas d'émission de rayonnement

Si $E > 4.9 \text{ eV}$ émission d'un rayonnement ultraviolet

**Confirmation du modèle de Bohr et de la quantification
des niveaux électroniques d'un atome**

Notes de cours

Approche de Planck du corps noir

- hypothèses :

* N résonateurs (oscillateurs) en équilibre thermique

* S_N^* et E_N sont des grandeurs extensives

$$\Rightarrow \begin{cases} S_N^* = N s^* & (N s^*) \\ E_N = N e = P e & (N e = P e) \end{cases}$$

* $S_N^* = k_B \ln \Omega(E_N) \quad (\Omega(E_N) = W)$

* $\Omega(E_N)$ = nombre de possibilités de distribuer P quanta indiscernables parmi N résonateurs discernables.

$N=10$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	← n° des résonateurs (discernables)
$P=100$	7	38	11	0	9	2	20	4	4	5	

$$\Omega(E_N) = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! P!} ; \quad N! = N^N \text{ Stirling.}$$

$$\ln N! = N \ln N - N \quad (N, P \gg 1)$$

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= \ln [(N+P-1)!] - \ln [(N-1)!] - \ln P! \\ &\approx (N+P-1) \ln (N+P-1) - (N+P-1) \\ &\quad - (N-1) \ln (N-1) + (N-1) - P \ln P + P \\ &\approx (N+P) \ln (N+P) - N \ln N - P \ln P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_N = k \{ (N+P) \ln(P+N) - N \ln N - P \ln P \}$$

$$E_N = N e = P \varepsilon \Rightarrow \frac{e}{\varepsilon} = \frac{P}{N}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_N^* &= k N \left\{ \left(1 + \frac{e}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{e}{\varepsilon}\right) - \frac{e}{\varepsilon} \ln \frac{e}{\varepsilon} \right\} \\ &= N s^* = N s^*\left(\frac{e}{\varepsilon}\right) \leftarrow \text{uniquement fonction de } \frac{e}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{à faire : } & N \left(1 + \frac{P}{N}\right) \ln \left(N \left(1 + \frac{P}{N}\right)\right) - N \ln N \\ & - N \left(\frac{e}{\varepsilon}\right) \ln \left(N \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)\right) = \dots \end{aligned}$$

$$\text{Wien} \Rightarrow E_\gamma(\lambda, T) d\lambda = T^5 f(\lambda T) d\lambda$$

densité d'énergie par unité de longueur d'onde

$$\Leftrightarrow E_\gamma(\omega, T) d\omega = \frac{\omega^3}{c^3} f(T/\omega) d\omega$$

on peut montrer que :

$$E_\gamma(\omega, T) d\omega = \frac{8\pi\omega^2}{c^3} \cdot e \cdot d\omega$$

densité de mode e-m.

→ énergie d'un oscillateur

$$\Rightarrow e = \omega f(T/\omega) \Leftrightarrow T = \omega f(e/\omega)$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{\partial S_N^*}{\partial E} = \frac{\partial s^*}{\partial e} = \frac{1}{\omega} f\left(\frac{e}{\omega}\right) \Rightarrow s^* = f\left(\frac{e}{\omega}\right)$$

$$J^* = f(e/\omega) \quad \text{mais aussi} \quad J^* = g(e/\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = h\omega$$

$$\Rightarrow J^* = k \left\{ \left(1 + \frac{e}{h\omega}\right) \ln \left(1 + \frac{e}{h\omega}\right) - \frac{e}{h\omega} \ln \frac{e}{h\omega} \right\}$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{dJ^*}{de} \Rightarrow e(T^*) = \frac{h\omega}{e^{h\omega/k_B T^*} - 1}$$

pour 1 oscillateur.

$$T^* = T$$

$$E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} e d\lambda$$

$$\Rightarrow E_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{k_B T \lambda}} - 1}$$

Formule de Planck.

/ Un peu de combinatoire ... / ... avec des urnes ...

α). nombre de façons de placer N objets discernables dans C boîtes discernables sans restriction sur le nombre d'objets par boîtes.

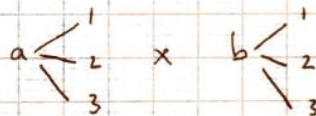
$$C^N$$

ex : $N = 2$: a et b (dossier)

$C = 3$: 1, 2 et 3

$$\Rightarrow 3^2 = 9.$$

	1	2	3
1	a	b	
2		a	b
3			a
4	a	b	
5	b	a	
6		a	b
7		b	a
8	a		b
9	b		a



β). ... avec pas plus d'un objet/boîte
($N \leq C$).

$$\frac{C!}{(C-N)!}$$

Le premier objet a C possibilités, le deuxième $(C-1)$... jusqu'au dernier, N , qui a $(C-N+1)$ possibilités

$$\Rightarrow C(C-1) \dots (C-N+1) \text{ possibilités}$$
$$= \frac{C!}{(C-N)!} = \frac{C(C-1) \dots 1}{(C-N)(C-N-1) \dots 1}$$

pour l'exemple : $\frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

par rapport au cas α) il faut enlever les configurations 1, 2 et 3. $\Rightarrow 9-3=6$.

γ). même cas que β) mais pour des objets indiscernables.

$$\Rightarrow \frac{C!}{(C-N)! N!} \sim \text{indiscernabilité!}$$

pour l'exemple : $\frac{6}{2!} = 3$ les configurations (4,5), (6,7) et (8,9) sont équivalentes

$$\Rightarrow 6-3=3.$$

δ). même cas que α) pour des objets indiscernables.

$$\frac{(C+N-1)!}{(C-1)! N!}$$

pour l'exemple : $\frac{4!}{2! 2!} = \frac{24}{6} = 6$

1 2 3

..

..

..

• •

• •

• •

6 possibilités.

→

- Pour une course de 20 chevaux
combien de grilles de tiercé
peut-on remplir ? $20 \times 19 \times 18$.

- On doit choisir 2 enseignants
parmi 20 pour faire passer un oral.
Combien y-a-t-il de choix possibles?

$$\binom{20}{2} = \frac{19 \times 20}{2} = \frac{20!}{2! 18!} \quad \text{Si au contraire il}$$

s'agit de choisir 1 titulaire et 1
remplaçant la réponse est 20×19 .

- Au cours d'une soirée où se rencontrent
cinq personnes, combien de poignées de
main seront échangées?

$$12 \ 23 \ 34 \ 45 = 10.$$

$$13 \ 24 \ 35$$

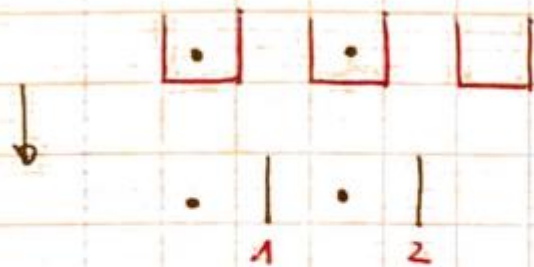
$$14 \ 25$$

$$15$$

= nombre de manières de choisir
(sans les distinguer) 2 personnes
parmi 5.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! 2!} = 10.$$

$N = 2$ objets ind. $\Rightarrow \bullet$



C boîtes $\rightarrow C-1$ murs.
séparations.

• On a $(N+C-1)!$ arrangements possibles de ces constituants.

• la conf $\bullet \underset{1}{|} \bullet \underset{2}{|}$ $\Leftrightarrow \bullet \underset{2}{|} \bullet \underset{1}{|}$

$\Rightarrow$ on doit diviser par le nombre d'arrangements des $(C-1)$ séparations

$\Rightarrow$ on doit diviser par $N!$ pour tenir en compte de l'indiscernabilité des objets

$$\Rightarrow \Omega = \frac{(N+C-1)!}{(C-1)! N!}$$