Examen

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h30 min
Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1 : Autocatalyse

Considérons la réaction chimique

$$A + X \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} 2X$$

dans laquelle une molécule de X se combine avec une molécule de A pour former deux molécules de X. Cela signifie que la substance chimique X stimule sa propre production, un processus appelé *autocatalyse*. Ce processus de rétroaction positive conduit à une réaction en chaîne, qui est finalement limitée par une « réaction inverse » dans laquelle $2X$ retourne à $A + X$.

Selon la loi d'action de masse de la cinétique chimique, la vitesse d'une réaction élémentaire est proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Notons dans la suite les concentrations par des lettres minuscules : $x = [X]$ et $a = [A]$. Supposons qu'il existe un énorme excès du composé chimique A, de sorte que sa concentration a puisse être considérée comme constante. L'équation décrivant la cinétique de x est alors

$$\dot{x} = k_+ a x - k_- x^2,$$

où k_+ et k_- sont des paramètres positifs appelés constantes de vitesse.

(a) Déterminez tous les points fixes de l'équation ci-dessus ainsi que leur stabilité.

(b) Esquissez $x(t)$ en fonction du temps t pour différentes valeurs initiales menant à des comportements qualitativement différents de la cinétique de la réaction chimique.

Exercice 2 : Bifurcation fourche

On considère le système dynamique du 1$^{\text{er}}$ ordre

$$\dot{x} = rx - \sinh x,$$

où $r \in \mathbb{R}$.

(a) Esquissez tous les flots sur la ligne qui sont qualitativement différents lorsque le paramètre de contrôle r varie. En particulier, montrez que le système présente une bifurcation fourche supercritique à une valeur critique r_{c} de r que l'on déterminera.

(b) En déduire le diagramme de bifurcation correspondant.

(c) Montrez que pour $r \gtrsim r_{\text{c}}$, les points fixes stables prennent la forme

$$x^* \simeq \pm\sqrt{6(r - r_{\text{c}})}.$$

Exercice 3 : Lapins *vs* moutons

On considère un modèle de compétition de Lotka–Volterra entre moutons et lapins qui mangent la même herbe. Soit x (y) la population de lapins (moutons). Le système dynamique non-linéaire du second ordre correspondant s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - 2x - y), \\ \dot{y} = y(2 - x - y), \end{cases} \tag{1}$$

avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

(a) Montrez que le système non-linéaire (1) possède 4 points fixes $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$, que l'on déterminera.

(b) Calculez la matrice jacobienne pour chacun de ces 4 points fixes.

(c) Déterminez la stabilité et la nature de chacun des points fixes.
<u>Indication</u> : $\sqrt{5} \simeq 2.2$.

(d) Esquissez le portrait de phase au voisinage de chaque point fixe.

(e) En déduire une ébauche du portrait de phase dans son ensemble, c'est à dire pour tout x et y positifs.

Exercice 4 : Circuit RLC

On considère un circuit RLC, dont la dépendance temporelle du courant électrique I est déterminée par l'équation différentielle homogène du 2ᵉ ordre

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0, \tag{2}$$

où L, R, et C sont respectivement l'inductance, la résistance, et la capacité du circuit, qui sont des quantités positives.

(a) En introduisant les quantités $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\Gamma = R/2L$, $\gamma = \Gamma/\omega_0$, et $\tau = \omega_0 t$, montrez que l'Eq. (2) prend la forme

$$I'' + 2\gamma I' + I = 0, \tag{3}$$

où $I' = \mathrm{d}I/\mathrm{d}\tau$ et $I'' = \mathrm{d}^2 I/\mathrm{d}\tau^2$.

(b) Re-écrivez l'Eq. (3) comme un système linéaire du second ordre. On notera $J = I'$. Quel est le point fixe de ce système ?

(c) Classifiez ce point fixe selon la valeur que prend γ. Dans chaque cas, esquissez le portrait de phase correspondant.