Contrôle continu

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h30 min
Le sujet comprend 3 pages au total

Exercice 1 : Variation de la pression dans l'atmosphère terrestre

On modélise l'atmosphère terrestre par un gaz parfait de masse molaire $M = 30\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ à la température $T(z)$, en équilibre dans le champ de pesanteur de la Terre, d'accélération $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On note $R = 10\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ la constante des gaz parfaits. Dans cet exercice, on cherche à déterminer la pression $p(z)$ en fonction de l'altitude z, avec $z = 0$ correspondant à l'altitude au niveau de la mer, $p(z = 0) = p_0$, et avec l'axe z orienté vers le haut.

1^re partie : Atmosphère isotherme

On considère dans un premier temps un modèle d'atmosphère terrestre isotherme, où $T(z) = T_0 = 300\,\mathrm{K}$ est une constante ne dépendant pas de l'altitude z.

(a) Donnez, sans justification, l'équation fondamentale de la statique des fluides parfaits.

(b) Justifiez soigneusement que dans ce modèle d'atmosphère isotherme, la pression est donnée par
$$p(z) = p_0\, \mathrm{e}^{-z/h}, \tag{1}$$
où h est une constante que vous exprimerez en fonction des paramètres du problème.

(c) Quelle est la dimension physique de h ?

(d) À l'aide des données du problème, estimez une valeur numérique pour h.

2^e partie : Atmosphère non-isotherme

On considère à présent un modèle un peu plus réaliste, où la température décroit en fonction de l'altitude. On supposera dans la suite que cette décroissance est linéaire : $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$, où α est une constante.

(a) Quelle est la dimension physique de α ?

(b) Calculez dans ce nouveau modèle la pression $p(z)$.

(c) Vérifiez votre résultat à la question précédente en le comparant dans la limite $\alpha z \sim \alpha h \ll 1$ à l'Eq. (1).
<u>Indication</u> : $a^b = \mathrm{e}^{\ln(a^b)} = \mathrm{e}^{b \ln a}$.

Exercice 2 : Écoulement de Poiseuille plan

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux et newtonien contraint entre deux plaques planes, infinies, parallèles, perpendiculaires à Oy et de cotes respectives $y = 0$ et $y = L$ (voir Fig. 1). On appelle ρ la masse volumique du fluide et η son coefficient de viscosité dynamique.

Les hypothèses de travail sont les suivantes :
— l'écoulement est permanent ;
— l'écoulement est incompressible ;
— le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire ;
— l'écoulement est parallèle à l'axe x et invariant par translation selon l'axe z : $\mathbf{v}(M,t) = v(x,y)\,\hat{x}$;
— on néglige la pesanteur.

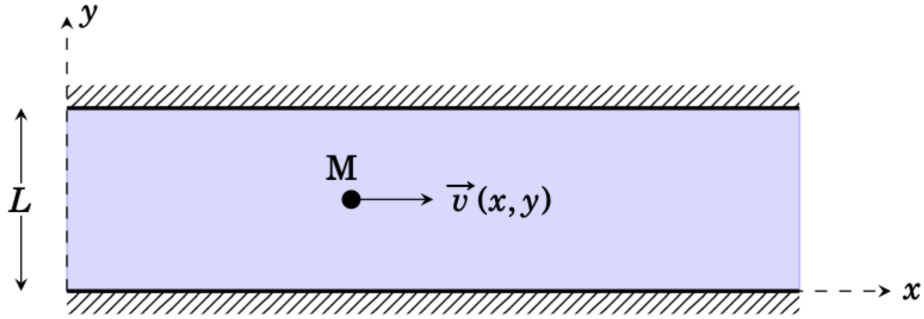

FIGURE 1

(a) Puisque le fluide est supposé incompressible, que vaut la divergence du champ de vecteur vitesse ?

(b) En déduire que $\mathbf{v}(M,t) = v(y)\,\hat{x}$.

(c) Soit $\mathbf{a}(M,t)$ l'accélération d'une particule de fluide. Celle-ci est donnée par la dérivée particulaire du champ de vitesse eulérien,

$$\mathbf{a}(M,t) = \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}.$$

Montrez que $\mathbf{a}(M,t) = \mathbf{0}$.

(d) À partir de l'équation de Navier–Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{ext}} + \eta \Delta \mathbf{v},$$

où p est la pression et $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{ext}}$ les forces volumiques extérieures, montrez que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial v^2}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

(e) Démontrez soigneusement à partir de la question précédente que le profil de vitesse est donné par

$$v(y) = \frac{K}{2\eta} y(y - L),$$

où K est une constante.

(f) À quoi correspond physiquement la quantité K ?

(g) Quel est le signe de K si l'écoulement va de la gauche vers la droite ?

(h) Dans ce dernier cas, esquissez le champ des vecteurs vitesses entre les deux plaques.

(i) Soit Q le débit volumique à travers une section délimitée par les plaques ($y = 0$ et $y = L$) et par les plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Toujours pour un écoulement de la gauche vers la droite, déterminez Q.

(j) Commentez le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 3 : Naufrage d'un bateau

On considère un bateau qui coule dans la mer, considérée comme un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ. Dans la suite, on appelle g l'accélération de la pesanteur. On note H la hauteur du bateau, M sa masse et S sa surface de base. On considère que le bateau est rempli d'eau jusqu'à une hauteur h et on note H_0 la hauteur du bateau qui se trouve dans l'eau (voir Fig. 2). La pression atmosphérique est notée p_{atm}.

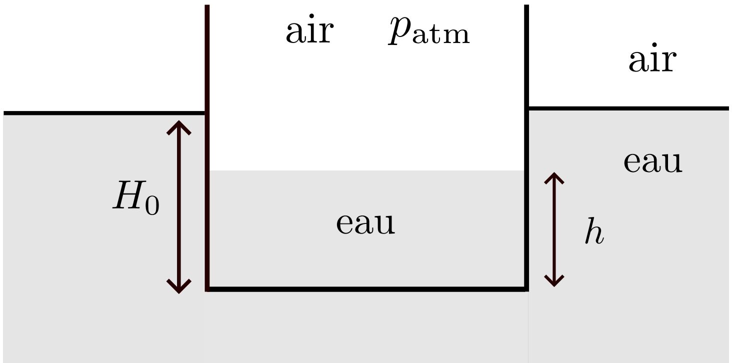

FIGURE 2

1$^{\text{re}}$ partie : Étude préliminaire

Montrez que la position d'équilibre H_0 du bateau s'exprime en fonction de h, M, ρ et S comme

$$H_0 = h + \frac{M}{\rho S}. \tag{2}$$

2$^{\text{e}}$ partie : Le bateau prend l'eau

On considère maintenant que le bateau est initialement (à $t = 0$) vide et qu'il se remplit par un petit trou de surface $s \ll S$ situé dans la coque à une hauteur l du fond. On note désormais $H_0(t)$ la hauteur du bateau dans l'eau, qui dépend du temps, ainsi que $h(t)$, la hauteur d'eau dans le bateau. Dans cette 2$^{\text{e}}$ partie, on considère des temps t tel que $h(t) < l$. On considère également que le bateau est pratiquement immobile et que l'Eq. (2) est vérifiée à chaque instant t.

(a) Énoncez le plus précisément possible le théorème de Bernoulli.

(b) En utilisant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant reliant la surface de la mer à un point situé au niveau du trou dans la coque du bateau, donnez l'expression de la vitesse $v(t)$ de l'eau qui pénètre dans le bateau par l'ouverture en fonction de $h(t)$ et des autres paramètres du problème.

(c) En déduire, en utilisant les règles de conservation, que la hauteur d'eau à l'intérieur du bateau vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{s}{S}\right)^2 g. \tag{3}$$

(d) Résoudre l'Eq. (3) et exprimez $h(t)$ en fonction de s, S, g, M, ρ et l.

3$^{\text{e}}$ partie : L'eau monte, le bateau coule

Soit t_1 le temps à partir duquel le bateau est rempli jusqu'à la hauteur du trou. Pour $t > t_1$, on a $h(t) > l$ et on considère une nouvelle phase du remplissage de la coque du bateau.

(a) Exprimez la pression p au niveau du trou dans la coque du bateau en fonction de p_{atm}, ρ, g, $h(t)$ et l.

(b) En utilisant le théorème de Bernoulli sur la même ligne de courant que dans la 2$^{\text{e}}$ partie, montrez que la vitesse de l'eau au niveau du trou ne dépend pas du temps et donnez son expression en fonction des données du problème.

(c) En utilisant les règles de conservation, en déduire que pour $t > t_1$,

$$h(t) = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{2gM}{\rho S}}\,(t - t_1) + l.$$