

Contrôle continu

Aucun document, téléphone portable, ordinateur, tablette ni calculatrice ne sont autorisés

Durée de l'épreuve : 1 h30 min

Le sujet comprend 2 pages au total

Exercice 1 : Sphère uniformément chargée en surface

On considère une sphère de rayon R , chargée uniformément en surface, avec $\sigma = \text{cst}$ la densité surfacique de charge correspondante. Dans la suite, on utilisera les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, φ) , et l'on place l'origine du repère au centre de la sphère.

- (a) À l'aide des symétries du système, argumentez brièvement du fait que le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \hat{r}$.
- (b) Question de cours : Énoncez le plus précisément possible le théorème de Gauss (sous sa forme intégrale) dans le cas général.
- (c) Déterminez en tout point de l'espace le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ généré par la distribution sphérique de l'énoncé en fonction de la densité surfacique de charge σ , de la permittivité du vide ϵ_0 , et du rayon R .
- (d) On place une charge ponctuelle test Q à une distance $r = 3R$ du centre de la sphère. Quelle est la force de Coulomb $\mathbf{F}$ ressentie par cette charge. En supposant $\sigma > 0$ et $Q > 0$, cette force est-elle attractive ou répulsive ? Sur un schéma, indiquez la direction de $\mathbf{F}$.
- (e) Le champ électrostatique est-il continu en $r = R$? Si oui/non, pourquoi ?
- (f) Esquissez $E(r)$ en fonction de r .
- (g) Question de cours : Donnez la définition du potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ à partir du champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.
- (h) Montrez que le potentiel électrique a pour expression (on prendra pour origine du potentiel $r = \infty$)

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} R, & r < R, \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r}, & r \geq R. \end{cases}$$

- (i) Esquissez $V(r)$ en fonction de r .
- (j) En utilisant le fait que $\mathbf{E} = -\nabla V$, vérifiez votre réponse à la Question (c).
Indication : Pour une fonction scalaire $f(\mathbf{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , on a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}.$$

- (k) Calculez l'énergie électrostatique W de la sphère chargée uniformément en surface.
- (l) On considère à présent que la sphère de rayon R porte une densité *volumique* de charge *non-uniforme*

$$\rho(r) = kr^2,$$

avec k une constante. Recalculez le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ correspondant.

Exercice 2 : Champ électrostatique créé par une demi-sphère chargée

On considère une distribution surfacique de charge uniforme σ sur une demi-sphère de rayon R (cf. Fig. 1). Par un calcul *direct*, déterminez le champ électrostatique à l'origine O .

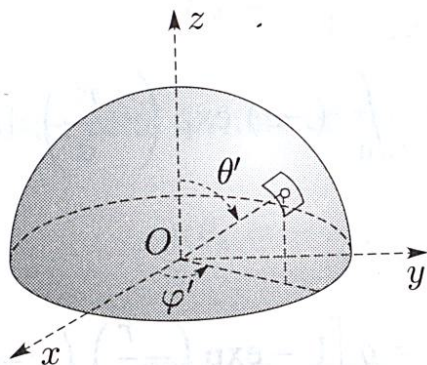


FIGURE 1

Exercice 3 : Dipôle électrique

On considère deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$ disposées comme sur la Fig. 2 dans le plan $0xy$ et séparées d'une distance $2a$.

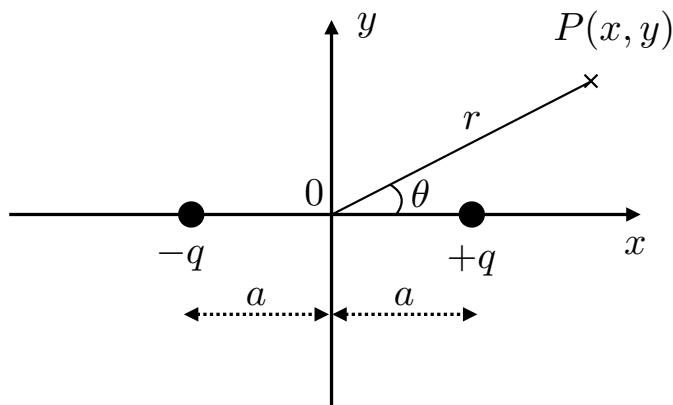


FIGURE 2

- Soit P un point quelconque du plan $0xy$ de coordonnées (x, y) . Déterminez (en coordonnées cartésiennes) l'expression du potentiel électrique $V(x, y)$ généré par les deux charges au point P .
- Exprimez le potentiel déterminé à la question précédente en coordonnées polaires (r, θ) (cf. Fig. 2).
- Montrez que pour $r \gg a$, le potentiel électrique déterminé à la précédente question prend la forme

$$V(r, \theta) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2},$$

où $p = 2qa$ est appelé le *moment dipolaire*.

- En déduire, toujours en coordonnées polaires, le champ électrostatique correspondant.
Indication : Pour une fonction scalaire $f(\mathbf{r})$ en coordonnées polaires (r, θ) , on a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}.$$