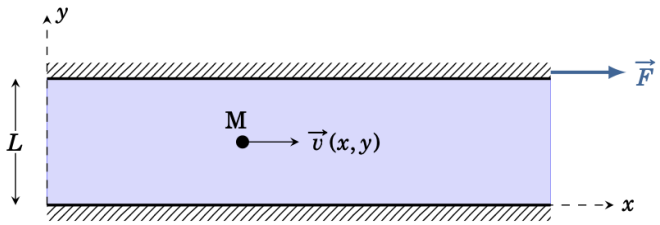
TD 7
Fluides visqueux

Exercice 1 : Écoulement de Couette plan

On considère un fluide newtonien incompressible de viscosité η, contraint entre deux plaques planes, infinies, parallèles, perpendiculaires à l'axe y et de cotes respectives $y = 0$ et $y = L$. La plaque de cote $y = 0$ est fixe alors que l'autre est animée d'une vitesse $\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{x}$. L'écoulement entre les plaques est supposé stationnaire et unidirectionnel de sorte que l'on peut le modéliser par le champ de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)\,\hat{x}$. Par ailleurs, on néglige les effets de la pesanteur.

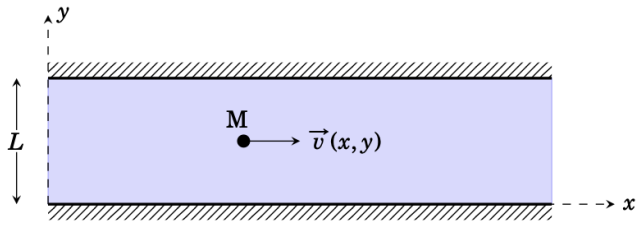


(a) Montrez que la vitesse ne dépend pas de x. Que peut-on dire de l'accélération d'une particule de fluide ?

(b) À partir de l'équation de Navier–Stokes, montrez qu'il n'est pas nécessaire d'imposer un gradient de pression suivant x pour que l'écoulement existe. On supposera donc que la pression est indépendante de x. En déduire l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ en un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ en fonction de v_0, y et L.

Exercice 2 : Écoulement de Poiseuille plan

On reprend la situation de l'exercice précédent. Cependant, les deux plaques sont désormais *fixes*. L'écoulement est toujours supposé stationnaire et unidirectionnel. On le modélise par le champ de vitesse $\mathbf{v} = v(y)\,\hat{x}$ et on note $p = p(x, y)$ le champ de pression. Enfin, on néglige les effets de la pesanteur.



(a) À partir de l'équation de Navier–Stokes, montrez maintenant qu'un gradient horizontal de pression est nécessaire pour qu'il y ait écoulement et que ce gradient est constant (on appellera K cette constante).

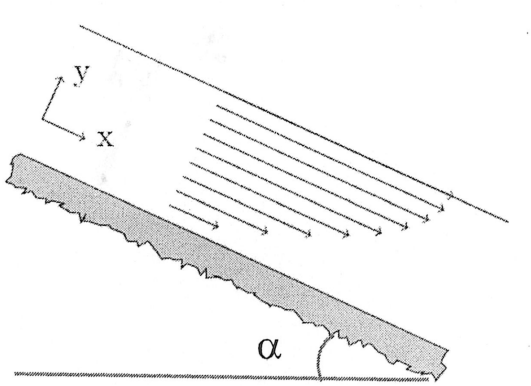
(b) Exprimez le champ de vitesse $\mathbf{v}(y)$. Calculez la vitesse maximale. Quel est le signe de K si la vitesse v est positive ?

(c) Représentez le profil des vitesses $v(y)$ entre les deux plaques.

(d) Soit Q le débit volumique à travers une section délimitée par les plaques ($y = 0$ et $y = L$) et par les plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Calculez Q et commentez le résultat.

Exercice 3 : Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux (newtonien et incompressible) sur un plan incliné, soumis aux seules forces de pesanteur. On note α l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. La direction x est la ligne de plus grande pente et on choisit y perpendiculaire à x dans le plan vertical. On note L l'épaisseur de l'écoulement, supposé uniforme et unidirectionnel, et p_0 la pression atmosphérique.



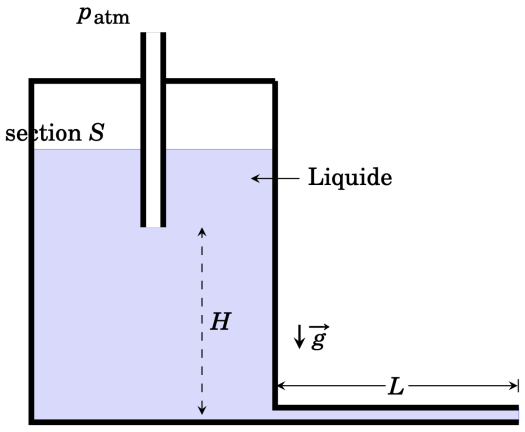
(a) À partir de l'équation de Navier–Stokes, exprimez la pression $p(y)$ en fonction de p_0, g, ρ, α et L.

(b) Donnez l'expression du champ de vitesse $\mathbf{v}(y)$. Représentez ensuite le profil des vitesses et donnez l'expression de la valeur maximale de la vitesse.

(c) Donnez l'expression du débit volumique entre les plans délimités par ($y = 0$, $y = L$) et ($z = 0$, $z = h$). En déduire l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction de la vitesse maximale trouvée à la question précédente.

Exercice 4 : Mesure de la viscosité de l'eau

On cherche les conditions qui permettent de mesurer la viscosité de l'eau à partir du dispositif ci-dessous. Un tube horizontal de longueur L et de rayon R est relié à un récipient de section S. Un tube vertical plonge dans le réservoir en mettant celui-ci en communication avec l'atmosphère.



(a) Supposons que les effets visqueux soient prépondérants dans le tube. Le débit Q est si faible que l'on peut considérer l'eau dans le réservoir à l'équilibre. En utilisant la loi de Poiseuille, montrez que le débit dans le tube s'écrit

$$Q = \frac{\pi R^4 \rho g H}{8 \eta L}. \tag{1}$$

(b) Ce débit varie-t-il au cours du temps ? Expliquez le rôle du tube vertical.

(c) Tracez le débit Q en fonction de la viscosité η. Que se passe-t-il lorsque $\eta \to 0$? Discuter la pertinence du modèle.

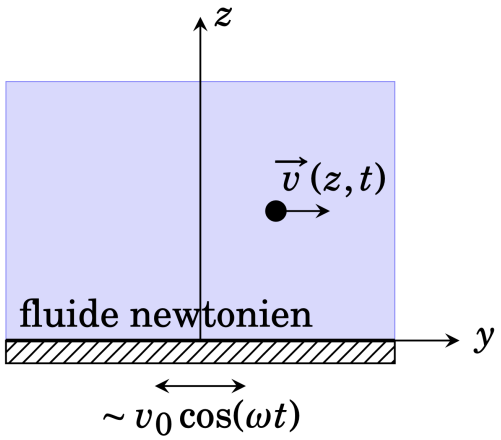
(d) On cherche à prévoir la valeur limite du débit quand $\eta \to 0$. On considère alors le fluide parfait. À l'aide de la relation de Bernoulli, exprimez le débit volumique Q en fonction de R, g et H.

(e) À partir de ces résultats, donnez l'allure du graphe de Q en fonction de η. En déduire que pour pouvoir appliquer la loi de Poiseuille, il faut que la viscosité du fluide vérifie la condition

$$\frac{\eta}{\rho} \gg \frac{R^2}{8L}\sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

(f) Si l'on prend un tube horizontal de rayon $R = 1\,\text{cm}$, $H = 50\,\text{cm}$ et $L = 1\,\text{m}$, la mesure de la viscosité de l'eau à partir de la loi (**??**) donnera t-elle une valeur fiable ?
Indication : La viscosité de l'eau est de l'ordre de $10^{-3}\,\text{P}\ell$.

Exercice 5 : Diffusion visqueuse



Une plaque plane d'extension infinie retient un fluide newtonien incompressible de viscosité η et de masse volumique ρ constante. Un dispositif entraîne la plaque dans un mouvement oscillant de pulsation ω. La vitesse de la plaque s'écrit

$$\mathbf{v}_\text{P} = v_0 \cos(\omega t)\, \hat{y}.$$

Pour des raisons de symétrie, le champ d'écoulement du fluide est de la forme $\mathbf{v} = v(z,t)\,\hat{y}$ et la pression est indépendante de x et y.

(a) Établissez l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(z,t)$. On fera intervenir le coefficient de *viscosité cinématique* $\nu = \eta/\rho$.

(b) Quelle est la nature physique de cette équation ? Quelle est la dimension de ν ? Que représente cette grandeur ?

(c) Après avoir précisé les conditions aux limites, déterminez les solutions de cette équation en régime forcé. On fera intervenir le paramètre $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$.
Indication : Utiliser la notation complexe et chercher la solution sous la forme $\tilde{v} = \tilde{A}(z)\,\text{e}^{\text{i}\omega t}$.

(d) Que représente δ ?

Figures du TD : © J. Roussel, Mécanique des Fluides (École Nationale Supérieure de Chimie de Rennes, non publié).