

Contrôle continu n° 1

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.

Durée de l'épreuve : 1h

Le sujet comprend deux pages au total.

Questions de cours

(4 points)

- (1) Énoncez le théorème de Gauss sous sa forme locale ainsi que sous sa forme intégrale. Précisez la signification de chaque terme.
- (2) Pour un matériau diélectrique de polarisation \mathbf{P} , donnez les expressions des densités surfacique et volumique de charges liées. Précisez la signification de chaque terme.
- (3) Donnez le lien entre le champ magnétique \mathbf{B} et le potentiel vecteur \mathbf{A} .
- (4) Pour un matériau magnétique d'aimantation \mathbf{M} , donnez les expressions des densités volumique et surfacique de courants liés.

Exercice 1

(8 points)

On considère une sphère de rayon R , et de densité volumique de charge $\rho(r) = kr^2$, avec k une constante et r la coordonnée radiale en sphérique. On appellera q la charge totale portée par la sphère.

- (1) Donnez les unités (en SI) de la constante k .
- (2) Déterminez k en fonction de q et R .
- (3) Argumentez *brièvement*, en considérant la symétrie du système, que le champ électrostatique a la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$.
- (4) Montrez que

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^3}{R^5}, & r < R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

- (5) Calculez le potentiel électrostatique au centre de la sphère, en prenant l'infini comme zéro de potentiel.

Exercice 2

(8 points)

On considère deux sphères concentriques de rayons a et b , avec $a < b$. La couche formée pour $a < r < b$ est composée d'un matériau diélectrique linéaire, de susceptibilité électrique χ_e . On place au centre commun aux deux sphères une charge (libre) q .

- (1) En utilisant la symétrie du système et le théorème de Gauss, déterminez le vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ dans tout l'espace.
- (2) En déduire le champ électrique dans tout l'espace.
- (3) Déduire de la question (2) que la polarisation du matériau a pour expression

$$\mathbf{P} = \frac{q\chi_e}{4\pi(1 + \chi_e)} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (1)$$

- (4) À partir de l'équation (1), déterminez les densités volumique et surfacique de charges liées. On rappelle qu'en coordonnées sphériques,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$.

- (5) Vérifiez que la charge *totale* du système est bien q .

Bon courage!