TD 2
Champs électriques dans la matière

Exercice 2.1

Un atome d'hydrogène, dont le rayon est égal au rayon de Bohr $a_0 = 0.5\,\text{Å}$, se situe entre deux plaques métalliques parallèles séparées de 1 mm. Ces deux dernières sont connectées à une batterie de 500 V. Quelle est la valeur (approximative) de la séparation entre le noyau et le nuage électronique ? [On donne la polarisabilité de l'hydrogène : $\alpha/4\pi\epsilon_0 = 0.667 \times 10^{-30}\,\text{m}^3$.]

Exercice 2.2

D'après la mécanique quantique, le nuage électronique dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène a une densité de charge

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a_0^3} \mathrm{e}^{-2r/a_0},$$

où e est la charge de l'électron et a_0 le rayon de Bohr. Déterminez la polarisabilité d'un tel atome. [*Indication :* calculez d'abord le champ électrique $E_\mathrm{e}(r)$ associé au nuage électronique ; développez ensuite l'exponentielle en supposant que $r \ll a_0$.]

Exercice 2.3

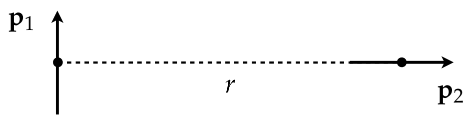
Dans le cours, nous avons argué du fait que dans un atome, le moment dipolaire induit $\mathbf{p}$ est proportionnel au champ électrique appliqué $\mathbf{E}$, $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$, avec α la polarisabilité atomique. Ceci est une « rêgle d'or », pas une loi fondamentale. Il est relativement facile, en théorie, de concocter des exceptions. Supposez par exemple que la densité de charge électronique $\rho(r) = kr\Theta(R - r)$, avec k une constante et R le rayon de cet atome fictif. À quelle puissance de E serait proportionnel p dans ce cas ? Trouvez une condition sur $\rho(r)$ tel que $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$ soit valable à champ faible.

Exercice 2.4

Une charge ponctuelle q se situe à une grande distance r d'un atome neutre de polarisabilité α. Calculez la force d'attraction entre la charge et l'atome.

Exercice 2.5

Deux dipôles idéaux $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ sont séparés d'une distance r (voir figure). Quel est le couple exercé par $\mathbf{p}_2$ sur $\mathbf{p}_1$? Quel est le couple exercé par $\mathbf{p}_1$ sur $\mathbf{p}_2$?



Exercice 2.6

Montrez que l'énergie d'un dipôle idéal $\mathbf{p}$ dans un champ électrique $\mathbf{E}$ est donné par

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Exercice 2.7

Montrez que l'énergie d'interaction entre deux dipôles séparés par un vecteur $\mathbf{r}$ est donné par

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\right].$$

Exercice 2.8

Un dipôle $\mathbf{p}$ se situe à une distance $\mathbf{r}$ d'une charge ponctuelle q, et orienté de telle façon que $\mathbf{p}$ forme un angle θ avec le vecteur $\mathbf{r}$ de q à $\mathbf{p}$.

(a) Quelle est la force exercée sur $\mathbf{p}$?

(b) Quelle est la force exercée sur q ?

Exercice 2.9

Une sphère de rayon R présente une polarisation $\mathbf{P} = k\mathbf{r}$, où k est une constante et $\mathbf{r}$ le vecteur dont l'origine se situe au centre de la sphère.

(a) Calculez les densités de charges liées surfacique et volumique σ_b et ρ_b ?

(b) Déterminez le champ électrique partout dans l'espace.

Exercice 2.10

Un cylindre de rayon a et de longueur L porte une polarisation permanente uniforme $\mathbf{P}$ parallèle à son axe. Déterminez les charges liées, et représentez le champ électrique résultant dans les deux cas limites suivants : (i) $L \gg a$ et (ii) $L \ll a$.

Exercice 2.11

Un cylindre très long, de rayon a, porte une polarisation uniforme $\mathbf{P}$ perpendiculaire à son axe, selon l'axe $\hat{\mathbf{x}}$. Déterminez le champ électrique à l'intérieur du cylindre.

Exercice 2.12

Lorsqu'un diélectrique neutre est polarisé, ses charges se réorganisent un petit peu, mais la charge *totale* reste nulle. Démontrez cela en partant des définitions des charges liées σ_b et ρ_b.

Exercice 2.13

Une couche sphérique épaisse (rayon interne a, rayon externe b) est composée d'un matériau diélectrique avec une polarisation permanente $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = k\hat{\mathbf{r}}/r$ (bien sûr pour $a < r < b$ seulement !), où k est une constante. Notez qu'il n'y a pas de charge *libre* dans ce problème. Déterminez le champ électrique dans tout l'espace de deux façons différentes :

(a) Localisez les charges liées, et utilisez la loi de Gauss sous sa forme $\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$ pour déterminer $\mathbf{E}$.

(b) Déterminez d'abord $\mathbf{D}$ grâce à la loi de Gauss sous sa forme $\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D} = Q_{\text{f,in}}$ puis en déduire $\mathbf{E}$.

Exercice 2.14

Supposons que le champ à l'intérieur d'un diélectrique infini soit $\mathbf{E}_0$, de telle sorte que le déplacement soit $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$. On creuse dans ce diélectrique une cavité sphérique. Déterminez le champ $\mathbf{E}$ au centre de la cavité en fonction de $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{P}$. Déterminez également le déplacement $\mathbf{D}$ en fonction de $\mathbf{D}_0$ et $\mathbf{P}$.
[*Indication :* Supposez que les cavités sont suffisamment petites de telle sorte que $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{D}_0$ soient uniformes. Notez également que creuser une cavité dans un diélectrique est similaire à superposer un objet de même forme mais de polarisation *opposée*.]

Exercice 2.15

On considère un condensateur plan dont l'espace entre les plaques est rempli par deux milieux diélectriques linéaires, chacun d'épaisseur a, de telle sorte que la distance entre les deux plaques est $2a$. Le diélectrique n° 1 a une constante diélectrique $\epsilon_{r,1} = 2$, le diélectrique n° 2 une constante $\epsilon_{r,2} = 1.5$. La densité de charge libre sur la plaque du haut (du bas) est $+\sigma$ ($-\sigma$).

(a) Déterminez le déplacement $\mathbf{D}$ dans chaque tranche.

(b) En déduire le champ électrique $\mathbf{E}$ dans chaque tranche.

(c) En déduire la polarisation $\mathbf{P}$ dans chaque tranche.

(d) Calculez la différence de potentiel entre les deux plaques du condensateur.

(e) Localisez et donnez la valeur de toutes les charges liées.

(f) Maintenant que vous connaissez toutes les charges (libres et liées), recalculez le champ dans chaque tranche, et comparez avec vos réponses à la question (b).

Exercice 2.16

Un câble coaxial est constitué d'un fil de cuivre de rayon a entouré par un tube concentrique de rayon c. L'espace entre le fil et le tube est partiellement rempli (de b à c, avec $a < b < c$) d'un matériau diélectrique de constante ϵ_r. Calculez la capacité par unité de longueur du câble.

Exercice 2.17

Une sphère parfaitement conductrice de rayon a porte une charge Q (répartie uniformément en volume) et est entourée par une couche concentrique sphérique diélectrique de rayon b. Le diélectrique est linéaire avec une susceptibilité χ_e. Déterminez l'énergie de cette configuration.

Exercice 2.18

On cherche à déterminer le champ à l'intérieur d'une sphère d'un matériau diélectrique linéaire plongé dans un champ externe $\mathbf{E}_0$ par la méthode suivante : tout d'abord, on prétend que le champ à l'intérieur de la sphère est $\mathbf{E}_0$, et on en déduit la polarisation résultante $\mathbf{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0$. Cette polarisation génère à son tour un champ $\mathbf{E}_1$ (cf. Exemple 2.2 du cours), ce qui modifie la polarisation de la valeur $\mathbf{P}_1$, ce qui change le champ d'une valeur $\mathbf{E}_2$, etc. Le champ total est $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots$ Sommez la série afin d'obtenir $\mathbf{E}$.