TPE MATHS

• Partie 1 : Géométrie dans le plan (2D)

27/09 Séance 1 : cours / TD
11/10 Séance 2 : 1h cours/TD, 1h exam
08/11 Séance 3 : correction exam + discussion + FAQ

• Partie 2 : Géométrie dans l'espace euclidien (3D)

22/11 séance 4 : cours/TD
6/12 séance 5 : 1h cours/TD, 1h exam + devoir maison
3/01 séance 6 : correction exam + discussion + FAQ + rendre le DM.

• Coefficients des exams : 1, 1, 1 devoir maison

• But de la matière : × vous aider en physique
× bonne note facile : bcp de rappels !
↳ ratio $\frac{\text{travail personnel}}{\text{gain}} \ll 1$.

Mail si vous avez une question,
thomas.allard@ipcms.unistra.fr
IPCMS ↦ Cronenbourg
Equipe de Physique Quantique Mésoscopique ↦ Matière condensée théorique
Questions cours / orientation / physique ↦ À la fin des 2h.

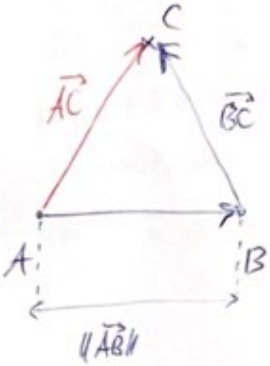
Partie 1 : Géométrie dans le plan (2D)

I) Plan :

1) Vecteurs :

Points A, B : vecteur $\vec{AB}$

- direction (inclinaison).
- sens $A \to B$.
- longueur $\|\vec{AB}\|$. (norme)



. Relation de Chasles : 3 points du plan ABC

alors $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

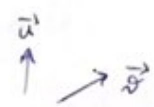
. Colinéarité : Si $\vec{u} = \alpha \vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

2) Décomposition d'1 vecteur en 2 vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ NON-COLINEAIRES, soit $\vec{w}$ un 3e vect.

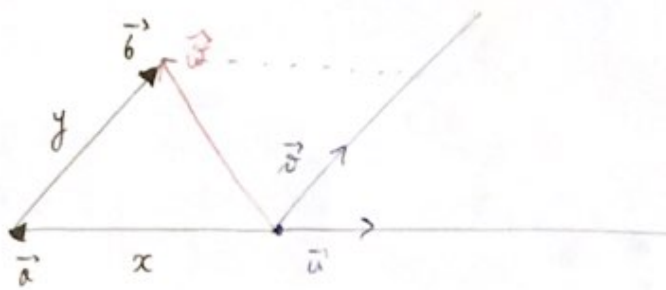
↳ $\exists!$ coordonnées (x, y) tq $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

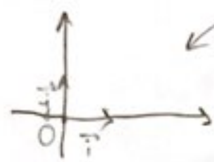
⇒ Combinaison linéaire.



* $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan
* $\vec{w} = \underbrace{\vec{a}}_{x\vec{u}} + \underbrace{\vec{b}}_{y\vec{v}}$.
* Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$: base orthonormée.

* Si on ajoute une origine O : $(O, \vec{u}, \vec{v})$ forme un repère.





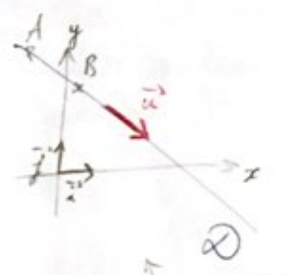
orthonormé.

ici on a pris
$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1.$
↳ vecteurs unitaires
Mais $\vec{u} \not\perp \vec{v}$: pas orthonormée.

3) Equat° cartésienne d'1 droite $\mathcal{D}$:

Déf : $\vec{u}$, vecteur non nul, est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{D}$, $\vec{u} \,//\, \vec{AB}$.

$\Leftrightarrow$ [$\vec{AB}$ est un vect. dir. ssi A et $B \in \mathcal{D}$ et $A \neq B$]



repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé

Equat° de $\mathcal{D}$: $\boxed{ax + by + c = 0.}$

$\Leftrightarrow \quad by = -ax - c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \alpha x + \beta} \qquad \alpha = -\frac{a}{b}, \quad \beta = -\frac{c}{b}$

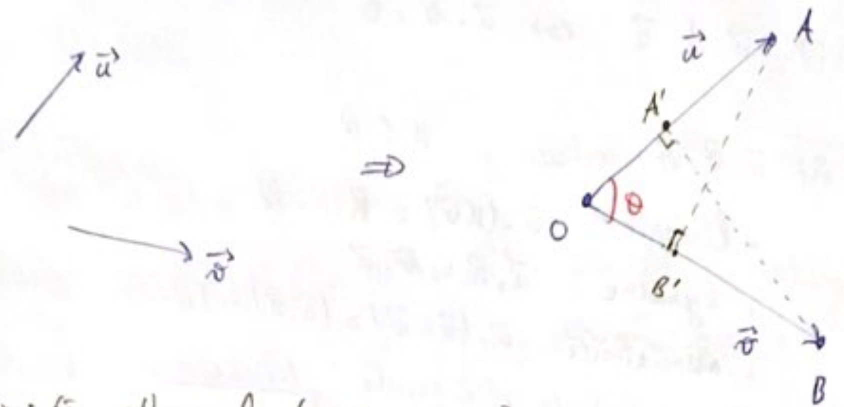
ordonnée à l'origine

coefficient directeur de la droite.

$\boxed{\text{Théorème :} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}} \left(\text{et} \quad -\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}} \right)$ sont des vect. dir. de $\mathcal{D}$.

Démo : Soient $A(x, y)$ et $B(x-b, y+a)$. ↦ les deux $\in \mathcal{D}$ et $\vec{AB} = (-b, a)$

II] Produit scalaire



$\begin{cases}\vec{u} = \vec{OA} \\ \vec{v} = \vec{OB} \\ \widehat{u,v} = \theta\end{cases}$

[A' = projeté orthogonal de B sur OA]

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= u_x v_x + u_y v_y \\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\widehat{u,v})\end{aligned}}$$

Avec les projetés orthogonaux :

→ trigo de base : $\begin{cases}\|OA'\| = \|OB\|\cos\theta \\ \|OB'\| = \|OA\|\cos\theta\end{cases}$

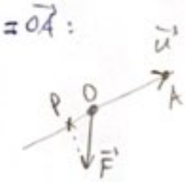
D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{OA}\cdot\vec{OB} \left(= \left|\|\vec{OA}\|\times\|\vec{OA'}\|\right| = \left|\|\vec{OB}\|\times\|\vec{OB'}\|\right|\right) = \vec{OA}\cdot\vec{OA'} = \vec{OB}\cdot\vec{OB'}$.

Donc interprétat° du produit scalaire de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$: produit de OA avec la project° orthogonale de B sur $\vec{OA}$.

⚠ C'est égal en valeur absolue seulement ⚠

Ex : Travail d'une force $\vec{F}$ le long du chemin $\vec{u} = \vec{OA}$:

$W = \vec{F}\cdot\vec{u} = \vec{OP}\cdot\vec{OA} = -\|\vec{OP}\|\times\|\vec{OA}\|$.



(Avant : $\widehat{OA, OA'} = 0$ donc $\cos(0) = 1$.
Ici : $\widehat{OA, OP} = \pi$ donc $\cos(\pi) = -1$. → signe moins)

Propriétés :

i/ $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$.

ii/ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vecteur, $K \in \mathbb{R}$.

- linéarité (1) : $\vec{u}.(K\vec{v}) = K(\vec{u}.\vec{v})$ (compatible à droite avec le produit + à gauche)
- symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ — permet la compatibilité à droite et à gauche
- linéarité (2) : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{v}) + (\vec{u}.\vec{w})$. (compatible à droite avec l'addition + aussi à gauche $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$.

[(forme bilinéaire car donne un nombre).] → linéaire à droite et à gauche : <u>bilinéaire</u>.

iii/ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

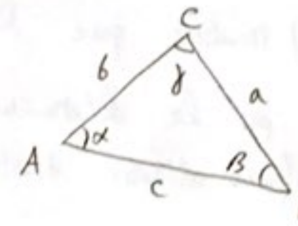
⚠ rappel : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

iv/ $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

A la maison : démontrer iv/ en se servant de ii/ et iii/.

Applications :

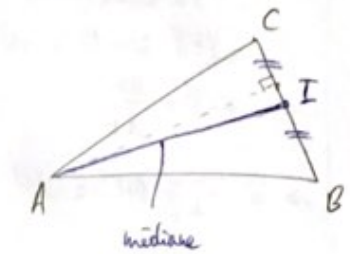
1/ Al-Kashi :



$$BC^2 = a^2 = \vec{BC}\cdot\vec{BC} = \vec{BC}^2$$
$$= (\vec{BA}+\vec{AC})^2 = \vec{BA}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{BA}\cdot\vec{AC}$$
$$= c^2 + b^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \left[a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).\right]$$

2/ Thm de la médiane :



$$AB^2 + AC^2 = (\vec{AI}+\vec{IB})^2 + (\vec{AI}+\underbrace{\vec{IC}}_{=-\vec{IB}})^2$$
$$= (\vec{AI}^2 + \vec{IB}^2 + \cancel{2\vec{AI}\cdot\vec{IB}}) + (\vec{AI}^2 + \vec{IB}^2 - \cancel{2\vec{AI}\cdot\vec{IB}})$$
$$= 2AI^2 + 2IB^2 = 2AI^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}\right]$$

III] Déterminant et Aire :

Soient 2 vect. $\vec{u}, \vec{v}$. $\det(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{i,j}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}_{i,j}$ alors $\left[\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= ad - bc \\ &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\end{aligned}\right]$

Propriétés : i/ antisymétrie : $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$.

linéarité : $\det(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}, \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u},\vec{w}) + \beta\det(\vec{v},\vec{w})$
$\det(\vec{w}, \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\det(\vec{w},\vec{u}) + \beta\det(\vec{w},\vec{v})$.

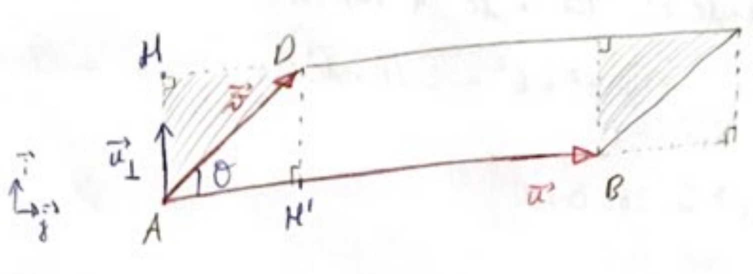
ii/ $\det(\vec{u},\vec{u}) = 0$.

[iii/ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (colinéaires) $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.]

Exo : 1) Montrer que l'aire du parallélogramme ABCD est donnée par le déterminant $|\det(\vec{AB}, \vec{AD})|$
(sans utiliser directement que $\det(\vec{AB},\vec{AD}) = \|\vec{AB}\| . \|\vec{AD}\| \sin\theta$)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{i,j}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_{ij}$



$\vec{u}_\perp$: vecteur unitaire de norme 1.

Aire $S = \|\vec{AB}\| . \|\vec{AH}\| = AB \times AH$
$= |\vec{AB} . \vec{AH}|$

$\boxed{AB = \|\vec{u}\|}$

$AH = \vec{v} . \vec{u_\perp}$

$\vec{v} . \vec{u}_\perp = \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}_\perp})$
$= \|\vec{v}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$
$= \|\vec{v}\| \sin\theta = AD \sin\theta$

Or, $\sin\theta = \frac{DH'}{AD}$

$\rightarrow \vec{v} . \vec{u}_\perp = DH' = AH$.

On veut $\vec{n} \perp \vec{u}$, avec $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unitaire}}}{\vec{u_\perp}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ ← pas unitaire.

un vect. unitaire s'écrit tjr $\vec{\mu} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} . \vec{u} = \alpha x_1 + \beta y_1 \overset{!}{=} 0 \rightarrow \alpha = -\beta \frac{y_1}{x_1}$.

Donc $\vec{n} = \beta \begin{pmatrix} -y_1/x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{x_1} \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

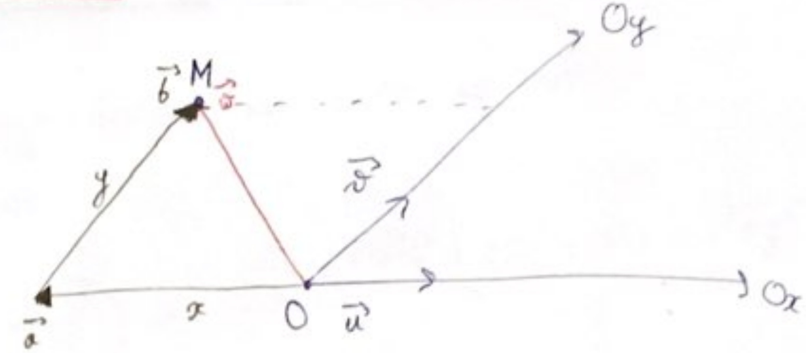
$\hookrightarrow \|\vec{n}\| = \frac{\beta}{x_1} \|\vec{u}\|$. $\quad \vec{u_\perp} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{u}\|} \frac{x_1}{\beta}$

$S(ABCD) = |\vec{AB} . \vec{AH}| = \left| \|\vec{AB}\| . \|\vec{AH}\| \right| = \left| \|\vec{u}\| \, \vec{v} . \frac{\vec{n}}{\|\vec{u}\|} \frac{x_1}{\beta} \right| = \left| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{x_1}{\beta} \right| = \left| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \right|$

$= |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |\det(u, v)| = \left[|\det(AB, AD)| = S(ABCD) \right]$

2) Pareil pour un triangle ABC : $\left[S(ABC) = \frac{1}{2} |\det(AB, AC)| \right]$

IV] Coordonnées :

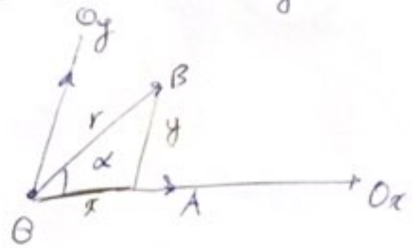


Repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ [NON-orthonormé : oblique].

Point M dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $\vec{\omega} = x\vec{u} + y\vec{v}$ donc $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\vec{u}, \vec{v}}$

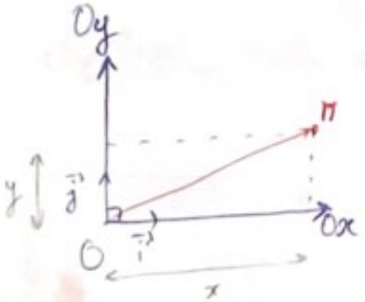
x = projeté de M sur Ox parallèlement à Oy ($\vec{v}$).

y = ——— Oy ——— Ox ($\vec{u}$)



Al-Kashi : $y^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha$.

1) Repère cartésien :



unitaires toujours.

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}}$ [Position du point M].

$$\begin{cases} x = \vec{OM} \cdot \vec{i} \\ y = \vec{OM} \cdot \vec{j} \end{cases}$$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont fixes.

$\left[\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}}\right]$; $\left[\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}}\right]$

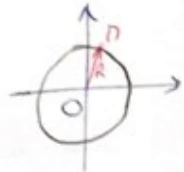
Avec $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

• Équation d'un cercle (en coords cartésiennes)

cercle → distance au centre est cste.

origine O. ← en (0,0).

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ij}$

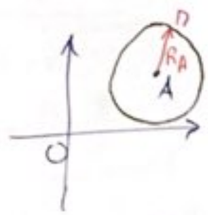


$\|\vec{OM}\| = cste = R = \sqrt{x^2+y^2}$.

↓

$\left[R^2 = x^2 + y^2\right]$: eq° cartésienne d'1 cercle de centre O et rayon R.

origine en A, avec $\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{ij}$



$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}_{ij}$

$\|\vec{AM}\| = cste = R_A = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2}$

↓

$\left[R_A^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2\right]$: eq° d'1 cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et rayon R_A.

• Rappel : eq° d'une droite :

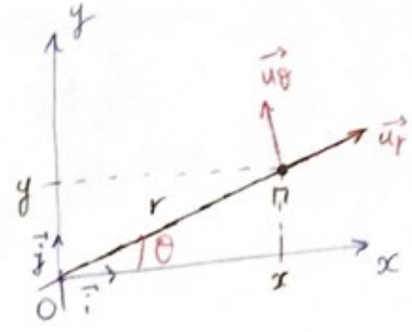
$y = Ax + B$

ou $ax + by + c = 0$.

Avec vect. dir. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}_{ij}$.

→ exo 5

2/ Coordonnées polaires : (r,θ)



Angle θ + distance r.
(% à Ox). (% à l'origine)

↳ Nouvelle base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$: "mobile".

(aussi unitaire)
i.e. $\|\vec{u_r}\| = \|\vec{u_\theta}\| = 1$.

coord radiale

coord orthoradiale

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ij} = r\vec{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_r u_\theta}}$$

↓

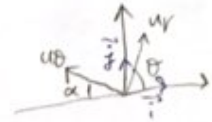
1 seule composante qui varie : $r = r(t)$, mais base mobile (on peut tourner θ)

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}}$$

$$\vec{u_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{ij} \qquad \vec{u_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{ij}$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_r u_\theta}} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_r u_\theta}}$$

↳ A démontrer à la maison avec trigo de base



[utiliser que $\|u_r\| = \|u_\theta\| = 1$]

+ ⚠ aux angles

• Equat° du cercle en polaire : $\|OM\| = cste = R_0$

↓

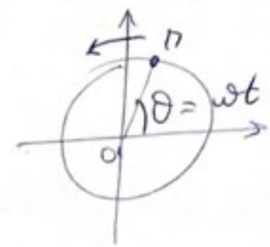
$[r = R_0.]$

cste.

coord polaire

Aplication : Mouvement circulaire uniforme (MCU).

Pour un cercle :
- eq. mvt : $\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \end{cases}$



- $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ij}$

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}_{ij}$

→ eq° trajectoire (cartésienne) :

$\cos(\omega t) = \frac{x}{R}$, $\sin(\omega t) = \frac{y}{R}$.

au carré ↓

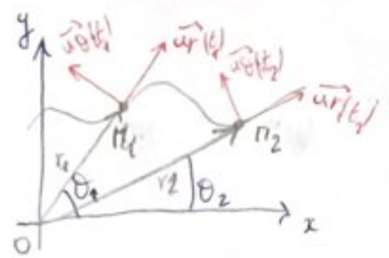
$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$.

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Pour une ellipse : $\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = B\sin(\omega t) \end{cases}$ $\begin{matrix} \cos(\omega t) = \frac{x}{A} \\ \sin(\omega t) = \frac{y}{A} \end{matrix}$ → $\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1}$

Mouvement quelconque (en polaire) :

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_r u_\theta}} = \vec{OM}(t)$



en t_1 : $r(t_1) = r_1$ → $\vec{OM_1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_r u_\theta}}$

$\vec{OM_2} = \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_r u_\theta}}$

⚠ u_r et u_θ dépendent aussi de t : repère mobile.

$$\left[\vec{OM} = r(t)\,\vec{u_r}(t)\right] \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \left[\vec{v} = \dot{r}(t)\,\vec{u_r} + r(t)\frac{d\vec{u_r}}{dt}\right]$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\left[\vec{a} = \ddot{r}(t)\,\vec{u_r} + 2\dot{r}(t)\frac{d\vec{u_r}}{dt} + r(t)\frac{d^2\vec{u_r}}{dt^2}\right]$$

Exo 1 : - Plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Droite $\mathcal{D}_1$: $y = 3x + 4$.
- Droite $\mathcal{D}_2$: de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$, qui passe par le point $O(0,0)$.

Question : Trouver l'intersection $(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$ des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

- - - - - - - - - - -

Pour trouver l'intersection de 2 droites, il nous faut leurs équations respectives. Ici on veut donc l'équation de $\mathcal{D}_2$: $ax + by + c = 0$.

- Son vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$. $\rightarrow$ $a=6$, $b=-5$.

  $\hookrightarrow$ $\mathcal{D}_2 : 6x - 5y + c = 0$.

- Elle passe par $O(0,0)$, donc $6\times 0 - 5\times 0 + c = 0 \iff c = 0$.

  $\hookrightarrow$ On obtient $\mathcal{D}_2 : 6x - 5y = 0$.

$$\iff \boxed{\mathcal{D}_2 : y = \frac{6}{5}x.}$$

Pour l'intersection, on égalise les deux équations de droite, car le point d'intersection $K = (x_K, y_K)$ appartient aux deux :

$$y_K = \frac{6}{5}x_K \quad \text{et} \quad y_K = 3x_K + 4 \iff 3x_K + 4 = \frac{6}{5}x_K \iff x_K = \frac{4}{\frac{6}{5}-3}$$

$$\iff x_K = 4 \times \frac{5}{-9} = \frac{-20}{9}. \qquad y_K = \frac{6}{5}x_K = \frac{6}{5}\times\left(\frac{-20}{9}\right) = -\frac{8}{3}.$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{L'intersection est } (x_K, y_K) = \left(\frac{-20}{9}, \frac{-8}{3}\right)}$$

Exo 2 :

Repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$.

① Dessiner les vecteurs.

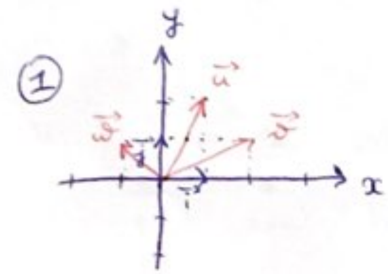
② $(\vec{u}, \vec{v})$ forme-t-il une base du plan ?

③ Si oui : écrire $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

④ Si oui : écrire $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

---

①



② Deux vecteurs forment une base s'ils sont non-colinéaires.

$\rightarrow$ Donc si : $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Ici, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 \neq 0$.

$\boxed{\hookrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ forme donc une base.}}$

③ Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a : $\begin{cases} \vec{u} = 1\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 1\vec{j}. \end{cases}$
$\vec{w} = -1\vec{i} + 1\vec{j}$.

Rq : $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{ij} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{ij} = \vec{w}$.

On veut $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, càd écrire $\vec{w}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{w} = a(\vec{i} + 2\vec{j}) + b(2\vec{i} + \vec{j}) = (a + 2b)\vec{i} + (2a + b)\vec{j} = -\vec{i} + \vec{j}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - 2b \\ 2(-1 - 2b) + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - 2b \\ -2 - 4b + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - 2b \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Donc } \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \\ \rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}}. \end{array}}$

④ $\begin{cases} \vec{i} = \vec{u} - 2\vec{j} \\ \vec{j} = \vec{v} - 2\vec{i} \end{cases} \rightarrow \vec{i} = \vec{u} - 2(\vec{v} - 2\vec{i}) = \vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{i} \Leftrightarrow \boxed{\vec{i} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}}$

D'où $\vec{j} = \vec{v} - 2\left[-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}\right] = \vec{v} + \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{4}{3}\vec{v} \boxed{= -\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{u}}$

Rq : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{ij}$ $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{ij}$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}}.}$$

(B)

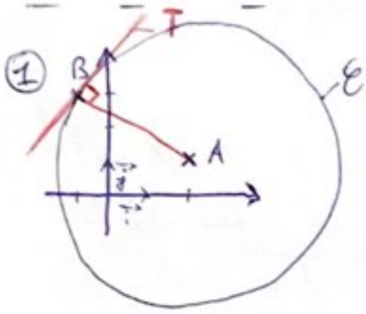
Exo 3: Deux points : $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\vec i \vec j}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_{\vec i \vec j}$.

① Dessiner les points, ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ de centre A, passant par B.

② Déterminer l'équation de la tangente T au point B du cercle $\mathcal{C}$.

③ Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}$.

---

① 

② Par définition, la tangente T d'un cercle sera toujours orthogonal au rayon du cercle.

Donc ici, $T \perp (AB)$.

Un vecteur directeur $\vec u = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}_{\vec i \vec j}$ de T sera donc $\perp \overrightarrow{AB}$.

Et on veut l'équation $T : ax + by + c = 0$.

Si $\vec u \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec u \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}_{\vec i \vec j} \cdot \begin{pmatrix}-1-2\\3-1\end{pmatrix}_{\vec i \vec j} = 0.$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}_{\vec i \vec j} \leftarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}_{\vec i \vec j}$.

Donc $-3 \times -b + 2a = 0$
$\Leftrightarrow a = \frac{-3}{2} b.$

$T : -\frac{3}{2} b x + by + c = 0.$ Comme T passe par $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_{\vec i \vec j}$: $-\frac{3}{2}b(-1) + b \times 3 + c = 0$
$\Leftrightarrow c = -3b - \frac{3}{2} b$
$= -\frac{9}{2} b.$

$\rightarrow T : b\left[\frac{-3}{2} x + y - \frac{9}{2}\right] = 0.$

comme $b \neq 0$, on peut diviser par b

$\boxed{T : \frac{-3}{2} x + y - \frac{9}{2} = 0.} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2} x + \frac{9}{2}.}$

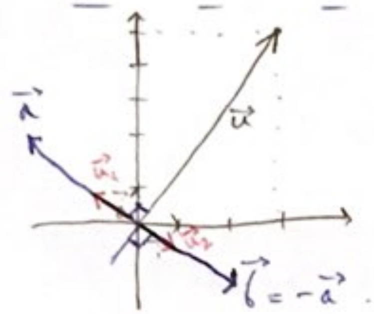
③ Centre $A(2,1)_{\vec i \vec j}$ et rayon $R = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

$\hookrightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13.}$

Exo 4 : Plan euclidien et repère $R(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}}$. Question : Trouver les 2 vecteurs $\perp$ à $\vec{u}$ et unitaires.

Aide : Un vecteur est unitaire si sa norme vaut 1.



On commence par chercher un vecteur non unitaire $\perp$ $\vec{u}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}}$ tel que $\vec{u} \perp \vec{a}$.

$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 3a_x + 5a_y = 0$

$\Leftrightarrow a_y = -\frac{3}{5} a_x$.

Donc $\vec{a} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ est $\perp$ à $\vec{u}$ $(\forall a_x)$.

Maintenant, on veut un vecteur unitaire : $\vec{u_1}$ tel que $\|\vec{u_1}\| = 1$.

↳ On cherche alors a_x tel que $\|\vec{a}\| = 1 = \sqrt{a_x^2 + (\frac{-3}{5} a_x)^2} = a_x \sqrt{1 + \frac{9}{25}}$

$= a_x \sqrt{\frac{34}{25}} = a_x \frac{\sqrt{34}}{5} = 1.$

$\Leftrightarrow a_x = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

Donc $\boxed{\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}}$ est unitaire ET $\perp$ à $\vec{u}$.

Un second vecteur unitaire ET $\perp$ à $\vec{u}$ est $\boxed{\vec{u_2} = -\vec{u_1}}$ (cf. schéma).

Remarque : Soit un vecteur $\vec{v}$, on peut toujours trouver un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{v}$: $\vec{u}_{unitaire} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Exo 5 :

$R = (O; \vec{i}, \vec{j})$. $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$. $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$

$\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$. $\quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$, $(x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$

Rq : $\mathbb{R}_*^+ = \mathbb{R}^+$ privé de 0.
$\mathbb{R}^+$ = réels positifs et nul $= \{[0; +\infty[\}$

(1) Dessin des points et vecteurs.

(2) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

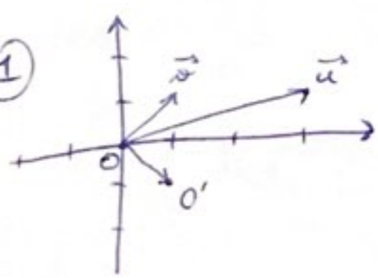
(3) Donner $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

On considère maintenant un nouveau repère $R' = (O'; \vec{u}, \vec{v})$.

(4) Donner les coordonnées du point M dans le repère R'.
(càd, on veut $\overrightarrow{O'M}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$)

---

(1)



(2) Base si non-colinéaire, $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.
Ici $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 - 1 = 2 \neq 0$. ok base ✓.

(3) $\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \vec{v} - \vec{j} \\ \vec{u} = 3\vec{v} - 3\vec{j} + \vec{j} = 3\vec{v} - 2\vec{j} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j} = \vec{v} - \vec{i} \\ \vec{u} = 3\vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{i}) = \vec{v} + 2\vec{i} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$

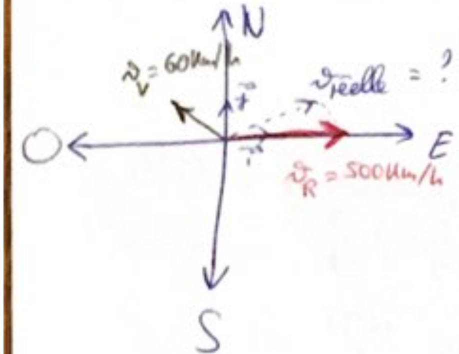
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j} = \vec{v} - \left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) \\ \vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{j} = -\frac{1}{2}(\vec{u} - 3\vec{v}) \\ \vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \end{cases}}$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}} \\ \vec{j} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}} \end{matrix}}$$

(4) $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$
$= \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}} = (x-1)\vec{i} + (1-y)\vec{j} = (x-1)\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) + (1-y)\frac{1}{2}(\vec{u} - 3\vec{v}) \times (-1)$
$= \left[\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)\right]\vec{u} + \left[-\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2}(y-1)\right]\vec{v}$.

$$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x + y - 2\\ 4 - x - 3y\end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}}}$$

Exo 6 : Réacteur d'un avion le pousse à 500 Km/h vers l'est.
Sachant que le vent souffle à 60 Km/h vers le Nord-Ouest, calculer la vitesse de l'avion par rapport au sol.



On déf. un repère $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{v}_{Réacteur} = 500\,\vec{i}$

$\vec{v}_{vent} = ?$ On sait que $\|\vec{v}_{vent}\| = 60$.

↳ $\vec{v}_{vent} = \|\vec{v}_{vent}\|\,\overrightarrow{u_{NO}}$.

vecteur unitaire qui pointe vers le Nord-Ouest

$$\overrightarrow{u_{NO}} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$$

"coefficient de normalisation", permettant d'avoir $\vec{u}_{NO}$ unitaire :

$\|\vec{u}_{NO}\| = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2} \overset{!}{=} 1 \iff \alpha = \sqrt{2}$. $\rightarrow \overrightarrow{u_{NO}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$

Donc $\vec{v}_{vent} = \frac{60}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$

Finalement, $\vec{v}_{Réelle} = \vec{v}_{Réacteur} + \vec{v}_{vent} = 500\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}} + \frac{60}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}$

$$= \begin{pmatrix}500 - \frac{60}{\sqrt{2}}\\ \frac{60}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}}.$$

La vitesse réelle est alors $\|\vec{v}_{Réelle}\| = \sqrt{(500 - 60/\sqrt{2})^2 + (60/\sqrt{2})^2}$

$$\boxed{\|\vec{v}_{Réelle}\| \simeq 459{,}54 \text{ Km/h}.}$$

Exo 7 [redacted] :

séance 3.

Exosystème MSV 2018 : étoile centre O, planète centre P, satellite de la planète P de centre S.

Ces 3 objets se promènent dans un plan, dont on choisit pour origine le centre O de l'étoile.

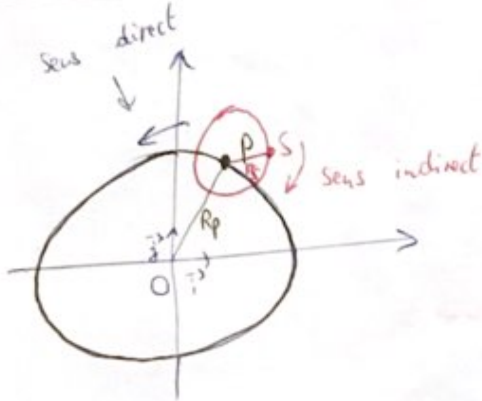
La planète est à 2 min-lumière et fait une révolution en 1 an (orbite circulaire, (sens direct)).

Le satellite est à 10 sec-lumière et fait 7 révolutions en 1 an ((sens indirect)).

Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité de longueur = sec-lumière, unité de temps = année

→ Calculer la position de la planète puis du satellite en fonction du temps, sachant qu'à $t=0$: $\begin{cases} \vec{i} \text{ et } \vec{OP} \text{ sont colinéaires.} \\ \vec{j} \text{ et } \vec{PS} \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$

Rappel : vitesse de rotation angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ → période de rotation



* Planète P : $R_p = 2 \text{ min. lum.} = 160 \text{ sec lum}$

$T_p = 1 \text{ an.}$ (période)

$\Omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = 2\pi \text{ an}^{-1}$ (pulsation) (vitesse de rotat°)

* Satellite S : $R_S = 10 \text{ sec. lum.}$

$T_S = \frac{1}{7} \text{ an.}$ $\Omega_S = \frac{2\pi}{1/7} \text{ an}^{-1} = 14\pi \text{ an}^{-1}$

A $t=0$: $\vec{i}$ et $\vec{OP}$ sont colinéaires
$\vec{j}$ et PS ——

⚠ t est en année car Ω en an^{-1} ⚠

mvt. circulaire uni : $\begin{cases} x = r\cos(\omega t + \varphi) \\ y = r\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} R_p \cos(\Omega_p t + \varphi) \\ R_p \sin(\Omega_p t + \varphi) \end{pmatrix}_{ij}$

$t=0$: $\vec{OP}_0 = \begin{pmatrix} R_p \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\varphi = 0}$

$\boxed{\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} R_p \cos(\Omega_p t) \\ R_p \sin(\Omega_p t) \end{pmatrix}_{ij}}$ posit° de la planète

$\vec{PS} = \begin{pmatrix} R_S \cos(\overset{\text{indirect}}{-}\Omega_S t + \varnothing) \\ R_S \sin(-\Omega_S t + \varnothing) \end{pmatrix}_{ij}$

$t=0$: $P_0S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_S \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\varnothing = \frac{\pi}{2}} \rightarrow \boxed{\vec{PS} = \begin{pmatrix} R_S \sin(\Omega_S t) \\ R_S \cos(\Omega_S t) \end{pmatrix}_{ij}} \rightarrow \boxed{\vec{OS}(t) = \vec{OP} + \vec{PS}}$ posit° du satellite