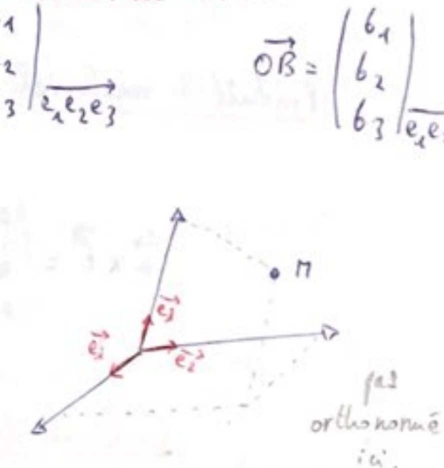
Partie 2 : Géométrie dans l'espace Euclidien. (3D).

I) Point, vecteur, droite, plan, produits :

Repère $R = (O ; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Si orthonormée + $\vec{e_1} \perp \vec{e_2} \perp \vec{e_3}$ règle de la main droite $\Rightarrow$ orthonormée directe.

* Point A : $\vec{OA} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1 e_2 e_3}}$ $\quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1 e_2 e_3}}$

* Vecteur : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1 e_2 e_3}}$



* Droite : $\mathcal{D}$ $\begin{cases} 1 \text{ vecteur directeur } \vec{u}. \\ 1 \text{ point } A. \end{cases}$

$$\forall M \in \mathcal{D}, \quad \vec{AM} = \alpha \vec{u} \quad \text{(colinéaires)}$$

$\hookrightarrow$ 3 équat° paramétriques. (α = paramètre).

* Plan : $\mathcal{P}$ $\begin{cases} 2 \text{ vecteurs non-colinéaires : } (\vec{u}, \vec{v}). \\ 1 \text{ point } B. \end{cases}$

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \vec{BM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$\hookrightarrow$ 3 équat° paramétriques. (α, β = paramètres).

Produit scalaire : $p = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1e_2e_3}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1e_2e_3}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

⚠ Que si $\overrightarrow{e_1e_2e_3}$ = base orthonormée.

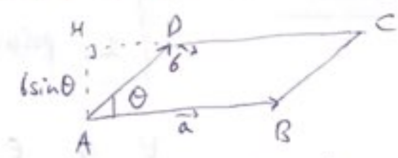
Orthogonalité : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$

Produit vectoriel : $\vec{R} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta \; \vec{n}$, $\vec{R}$ = vecteur

$\boxed{\vec{n} \perp \text{plan } (\vec{a},\vec{b})}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1e_2e_3}} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1e_2e_3}} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_1e_2e_3}}$$

Colinéarité : $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$



Aire parallélogramme ABCD :

2D : $S(ABCD) = |\det(\vec{a},\vec{b})|.$

3D : $S(ABCD) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$

$S(ABCD) = AB.AH = ab\sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Produit mixte : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

(permutation cyclique)

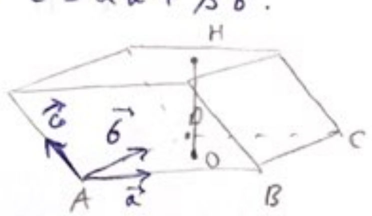
Coplanarité : $[\vec{c} \in \text{plan } (\vec{a},\vec{b})] \Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$

$\Leftrightarrow \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$

Volume parallélépipède

$V = S(ABCD) \times OH$, $\begin{cases} OH \perp (\vec{a},\vec{b}) \\ OH \parallel \vec{a} \times \vec{b} \end{cases}$

↳ $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



Exo 1 : 1/ Déterminer une base orthonormale directe dont un des vecteurs est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}} = \vec{n_1}$.

2/ Pour quelle valeur de α les vect. $\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

1/ $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_{ijk}$ norme $\|\vec{n_1}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$. $\mapsto \vec{u_1} = \frac{\vec{n_1}}{\|\vec{n_1}\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_{ijk}$

On veut $\vec{n_2} \perp \vec{u_1}$: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{ijk}$ $\mapsto \vec{n_2}\cdot\vec{u_1} = 0$

$\Leftrightarrow a + 2b + 2c = 0$

Si $a = 0$, il faut $b = -c$.

$\hookrightarrow$ on choisit $b = 1 \mapsto c = -1$.

i) trouver 1 vect. unit. colin. à $\vec{n_1}$
ii) trouver 1 vect. $\perp$ (bcp de solut°, on en choisit 1).
iii) produit vect. pour trouver le dernier.

$\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Base orthonormale directe : $\vec{u_3} = \vec{u_1} \times \vec{u_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_{ijk} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_{ijk} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}_{ijk}$.

2/ Coplanaire $\Rightarrow$ produit mixte $= 0$. $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha^2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}$

$= \alpha^3 + 1$

$\boxed{\alpha = -1}$

méthode avancée, pas besoin de comprendre

$$\begin{vmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & \alpha\\ \alpha & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{vmatrix} - \alpha\begin{vmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}0 & 1\\ \alpha & 0\end{vmatrix}$$

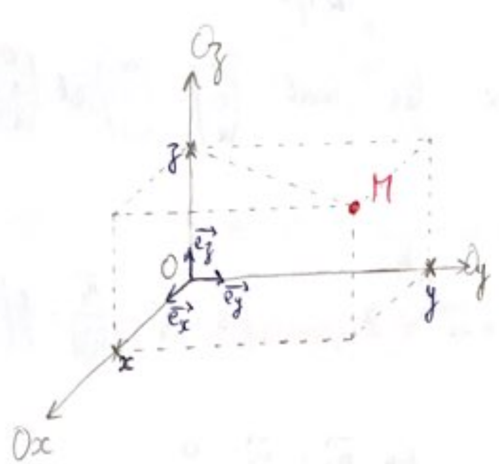
$$= 1 - 0 - \alpha(0 - \alpha^2) + 0 = 1 + \alpha^3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

Rq : • det de 2 vecteurs 2D : $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$. : $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
• det de 3 vecteurs 3D : $\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}e & h\\ f & i\end{vmatrix} - d\begin{vmatrix}b & h\\ c & i\end{vmatrix} + g\begin{vmatrix}b & e\\ c & f\end{vmatrix}$. $\left(\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}\right)$

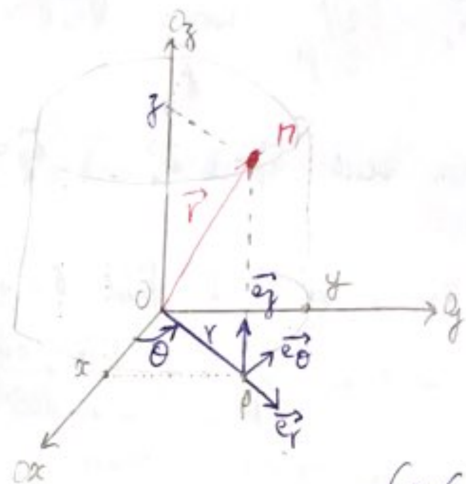
II] Coordonnées :

[cf wikipedia "coordonnées sphériques" pour avoir de beaux schémas]



$$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}.$$

$$(x, y, z) \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$



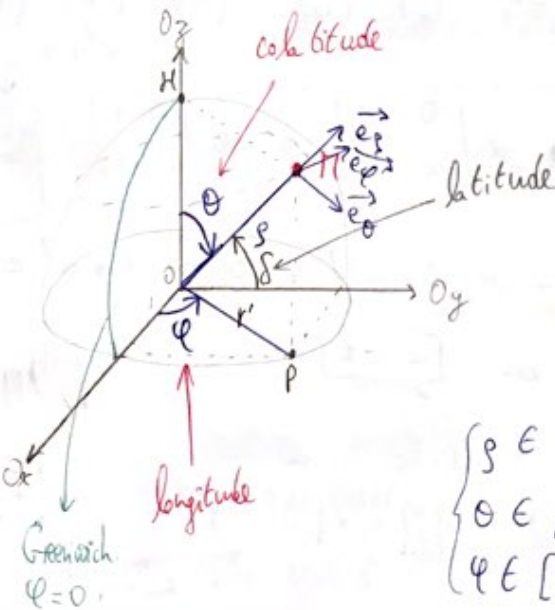
$$\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Comme en 2 dimensions.

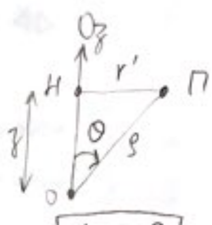
$$(r, \theta, z) \qquad \begin{cases} r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, 2\pi]. \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



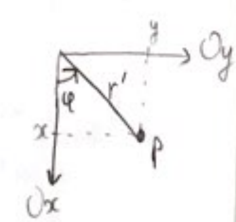
$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho}.$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \\ \theta = \arccos(z/\rho). \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



$\boxed{r' = \rho\cos\theta}$



Exo2:

(3)

Soit A, B 2 pts de coords cylindriques : $\begin{cases}(r_A = 1,\ \theta_A = \frac{-\pi}{4},\ z_A = 2) \\ (r_B = 2,\ \theta_B = \frac{\pi}{3},\ z_B = 4)\end{cases}$

↳ Quelle est la distance entre A et B ?

→ en cartésiens : $A : \begin{pmatrix} x_A = 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_A = 1\times(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ z_A = 2 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{u}}$

$B : \begin{pmatrix} x_B = 2\times\frac{1}{2} \\ y_B = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_B = 4 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{u}}$

↳ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{3}+1/\sqrt{2} \\ 4-2 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{u}}$. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(1-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 4}$

$= \sqrt{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}+3+\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+4}$

$= \sqrt{9 + 2\underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}_{\approx 1}} \approx 3,17.$

Géographie : * $\varphi \in [-\pi, \pi]$
* $\delta = \frac{\pi}{2} - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

* Ox à Oz : méridien de Greenwich ($\varphi = 0$)
* Nord : $\delta > 0$, Sud : $\delta < 0$.
* Est : $\varphi > 0$, Ouest : $\varphi < 0$.

Exo 3 :

Coordonnées GPS de Strasbourg à la surface de la Terre : (R = 6378 Km)

Lattitude : 48° 34′ 24″ N.

Longitude : 7° 45′ 7″ E.

Quest° : Coordonnées cartésiennes de Strasbourg ?

Latitude $\boxed{\delta = \frac{\pi}{2} - \theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \delta = 90° - [48° + \frac{34}{60} + \frac{24}{3600}]$

R : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ avec O centre.

$\delta = 48,573° \rightarrow \theta = 41,427°$

Longitude $\varphi = [7° + \frac{45}{60} + \frac{7}{3600}] = +7,752°$.

↳ $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi = 4738\ Km \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = 645\ Km \\ z = 4220\ Km \end{cases}$

III] Equations dans l'espace 3D :

1) Droite dans l'espace :

$\mathcal{D}$: vecteur dir. $\vec{u}$ + 1 pt A. $\mapsto$ $\mathcal{D} = \{A ; \vec{u}\}$.

$\forall M \in \mathcal{D}$: $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$ (déf. de colinéaire)

$\Leftrightarrow$ avec $M(x,y,z)$

Equat° paramétrique de droite : $\mathcal{D} : \begin{cases} x = \alpha u_x + x_A \\ y = \alpha u_y + y_A \\ z = \alpha u_z + z_A \end{cases}$ ($\vec{u}$, A)

$\alpha \in \mathbb{R}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{D}$ tq A et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$.

$\Rightarrow \vec{AB}$ est un vect. dir. de $\mathcal{D}$. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-0 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}$.

Donc $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = 4\alpha \\ z = 2\alpha + 3 \end{cases}$ (On dois aussi avec x_B, y_B et z_B)

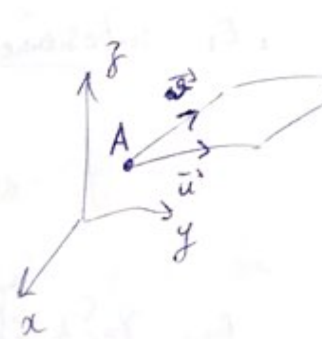
$\hookrightarrow$ autre représentation $\hookrightarrow$ OK. (pour B : $\alpha = 0$ pour A : $\alpha = -1$)

→ Tous les points $M(x,y,z)$ de la droite $\mathcal{D}$ respectent ce système d'équat°, avec à chaque fois pas forcément le même α.

ex : remplace (x,y,z) par A : $\alpha = 0$. par B : $\alpha = 1$.

2/ Plan $\mathcal{P}$:

Caractérisé par 2 vect. non-colin + 1 point.



$$\mathcal{P} = \{A; \vec{u}, \vec{v}\}.$$

Un point M du plan est déf par $\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$$A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$

- Eq° paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = \alpha u_x + \beta v_x + x_A \\ y = \alpha u_y + \beta v_y + y_A \\ z = \alpha u_z + \beta v_z + z_A \end{cases}$

$\downarrow$

(α, β)

Exo 4 : Soient les eq. param. suivantes, forment-elles 1 plan ?

a) $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 5 + 2\lambda - 6\mu \\ y = -3\lambda + 9\mu \\ z = 3 + \lambda - 2\mu \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 6-9 \\ -6-(-4) \\ 18-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. $\mapsto \mathcal{P} =$ plan.

$\hookrightarrow$ NON-COLIN.

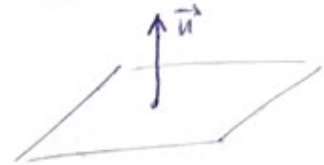
b) $\mathcal{P}' : \begin{cases} x = 7 + 2\lambda - 6\mu \\ y = -3\lambda + 9\mu \\ z = -1 + \lambda - 3\mu \end{cases} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}' = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{u}' \times \vec{v}' = \begin{pmatrix} -6+6 \\ -6+6 \\ 18-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ COLIN.

En effet, $\boxed{\vec{v}' = -3\vec{u}'}$ $\mapsto \mathcal{P}' \neq$ plan.

• Eq° cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$: vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{i}\vec{j}\vec{u})}$

$$\boxed{\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0}$$



$(a, b, c) \neq (0,0,0)$

on l'obtient avec le point A. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{P} = \{A ; \vec{n}\}$

démo : $A : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, $\vec{n}$ vect. normal. Donc $\forall\ \Pi \in \mathcal{P}$, $\vec{A\Pi} \perp \vec{n}$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftarrow \vec{A\Pi} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{\equiv d} = 0$$

■

Exemple : (exo 5 :)

a) $\mathcal{P} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}\vec{j}\vec{u})} ; \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}\vec{j}\vec{u})} \right\}$. eq° de $\mathcal{P}$?

↳ $4x + 6y - 2z + d = 0$

Et passe par A donc $4 \times 3 + 6 \times 1 - 2 \times (-2) + d = 0$

$\Leftrightarrow 12 + 6 + 4 + d = 22 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -22$

$$\boxed{4x + 6y - 2z - 22 = 0}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ ou non ? $0 \times x + 6 \times 1 - 2 \times (-2) - 22 = 6 + 4 - 22 = -12 \neq 0.$

↳ Donc $\boxed{\text{non}}$ $B \notin \mathcal{P}$, car B ne respecte pas l'éq° de $\mathcal{P}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. mq $\vec{DC} \perp \mathcal{P}$. $\vec{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{DC} \perp \mathcal{P}$ si $\vec{DC} \parallel \vec{n}$

Or $\vec{DC} = -\frac{1}{2}\vec{n}$. $(\vec{DC} \times \vec{n} = \vec{0})$ Donc oui, $\boxed{\vec{DC} \perp \mathcal{P}.}$

b) Déterminer l'éq° de $\mathcal{P}' \perp \mathcal{P}$, passant par $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$. (S)

$\mathcal{P}' \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n}' \perp \vec{n}$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ tjr. $\quad \vec{n}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = \underline{0 = 4a + 6b - 2c}$

- Eq° de $\mathcal{P}'$: $\underline{ax + by + cz + d = 0}$ $\quad$ - Et $O \in \mathcal{P}'$ donc

$0 + 0 - 0 + d = 0 \Rightarrow \underline{d = 0}$

- $E \in \mathcal{P}' \rightarrow a \times 0 + b \times 2 + c \times (-4) + 0 = 0 \Leftrightarrow 2b = 4c \Leftrightarrow \underline{b = 2c}$.

Donc $4a + 6 \times 2c - 2c = 4a + 5 \times 2c = 4a + 10c = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 5c = 0$

$\Leftrightarrow \underline{a = -\frac{5}{2}c}$

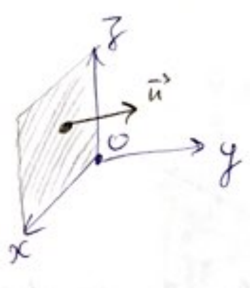
$\rightarrow -\frac{5}{2}cx + 2cy + cz = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x + 2y + z = 0$ $\quad$ car $c \neq 0$ ⚠

$\Leftrightarrow \boxed{-5x + 4y + 2z = 0}$ (pour éviter la fraction)

car si $c = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$, et on a imposé $(a,b,c,d) \neq (0,0,0)$

Exo 6 :

Quelle est l'éq° du plan xOz passant par O ?



Un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{ijk}}$

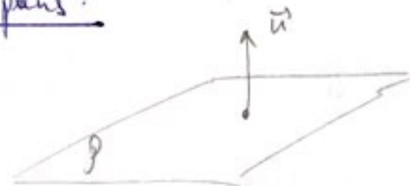
Donc $\mathcal{P}$: $\underline{y + d = 0}$.

Et $\mathcal{P}$ passe par $O \rightarrow 0 + d = 0 \rightarrow \underline{d = 0}$.

$\hookrightarrow \mathcal{P}$: $\boxed{y = 0}$

• Intersection de 2 plans :

*** Cas 1 :**



$ax + by + cz + d = 0$.

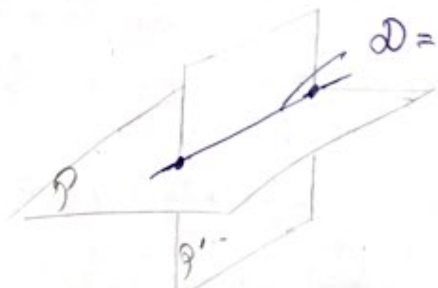
$a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pas d'intersection si } \vec{n}' \parallel \vec{n}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

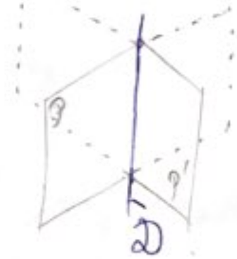
⚠ Si en plus $d' = d$, alors $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$.

*** Cas 2 :**

$\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.



$\Leftrightarrow$



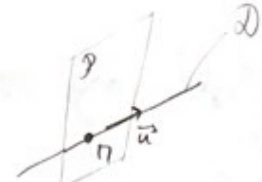
$\Rightarrow$ Si intersection, $\exists\ \mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Réciproquement, une droite $\mathcal{D}$ est définie par 2 plans.

$$\mathcal{D} : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

$(a, b, c) \neq (a', b', c')$ sinon pas d'intersect°

$\mathcal{D} = \{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$, ou $\mathcal{D} = \{A ; \vec{u}\}$.



(Exemple :) Soit $\mathcal{D} = \{\Pi ; \vec{u}\}$, $\Pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ éq° cart. du plan $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$: $\vec{u} \perp \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P} : 4x + 5y - 6z + d = 0$.

Passe par Π : $12 + 10 - 6 + d = 16 + d = 0$. $\underline{d = -16}$.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\mathcal{P} : 4x + 5y - 6z - 16 = 0.}$

Exo 7 : $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{OA} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

1°/ Mq $(O, \vec{u}, \vec{v})$ déf. un plan $\mathcal{P}$.

2°/ Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{D} = \{A ; \vec{w}\}$.

Indice : éq° param. de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$.

1°/ Plan si $(\vec{u}, \vec{v})$ non-colin. $\mapsto$ $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ OK

$\vec{u} \times \vec{v} \perp (\vec{u}, \vec{v})$ donc $\vec{u} \times \vec{v} \parallel \vec{n}$. Donc say $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\downarrow$

$\mathcal{P} : x + y + z + d = 0$.

Passe par O $\mapsto$ $d = 0$ $\mapsto$ $\boxed{\mathcal{P} : x + y + z = 0}$

2°/ Intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = 1$ point $I = \begin{pmatrix}x_I\\y_I\\z_I\end{pmatrix}$

$\mathcal{D} = \{A ; \vec{w}\}$, $\forall\, M \in \mathcal{D}$ $\vec{AM} = \alpha \vec{w}$ $\mapsto$ $\begin{cases} x = \alpha w_x + x_A \\ y = \alpha w_y + y_A \\ z = \alpha w_z + z_A \end{cases}$.

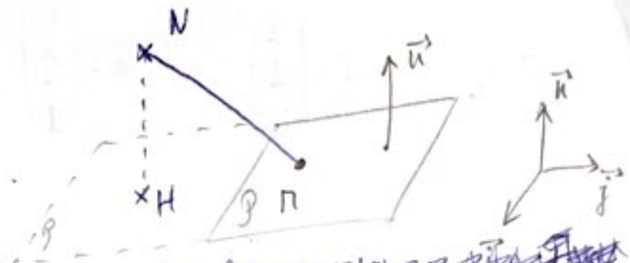
De $\vec{OA}$ $\mapsto$ $A = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\longmapsto$ $\begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = \alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases}$: éq° param. de $\mathcal{D}$.

$I = \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \rightarrow \alpha + 2 + \alpha + 1 + \alpha = 0 \iff 3\alpha + 3 = 0$

$\iff \boxed{\alpha = -1}$

$\begin{cases} x_I = -1 + 2 \\ y_I = -1 + 1 \\ z_I = -1 \end{cases} \iff I = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\in \mathcal{D}$.

- **Distance point à 1 plan :**



$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \ ; \ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}}$.

distance $\bar{d}(N, \mathcal{P}) = \|\vec{HN}\| = \lambda\|\vec{n}\|$.

$$\vec{HN} = \lambda\vec{n} \iff \begin{pmatrix} x_N - x_H \\ y_N - y_H \\ z_N - z_H \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_H = -\lambda a + x_N \\ y_H = -\lambda b + y_N \\ z_H = -\lambda c + z_N \end{cases}$$

$(\lambda \in \mathbb{R}^+)$.

et $\{ax_H + by_H + cz_H + d = 0$.

car $H \in \mathcal{P}$.

D'où $a(-\lambda a + x_N) + b(-\lambda b + y_N) + c(-\lambda c + z_N) + d = 0$

$\iff -\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (ax_N + by_N + cz_N + d) = 0$

$\iff \lambda = + \dfrac{ax_N + by_N + cz_N + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. $\quad ((a,b,c) \neq (0,0,0))$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$$\Rightarrow \boxed{\bar{d}(N, \mathcal{P}) = \frac{ax_N + by_N + cz_N + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

3) Sphère S :

. Centre C ; $\forall\ M \in S$, $\|\vec{CM}\| = cste = R_0$ $\quad \vec{CM} = \begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}}$

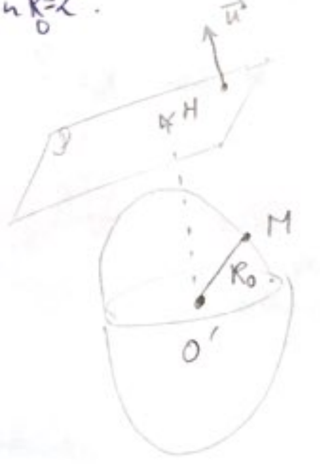
$M = (x, y, z)$

$$S : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R_0^2.$$

. En coords sphérique, $S : r(\theta, \varphi) = R_0$, $\forall (\theta, \varphi)$.

Exercice 8 : S : sphère centre $O' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, rayon $R_0 = 2$.

$\mathcal{P}$: plan $3x + 4z - 1 = 0$.



Question 1 : Intersection de $\mathcal{P} \cap S$?

Question 2 : $\mathcal{P}' : 3x + 4z - 6 = 0$. $\mathcal{P}' \cap\ = ?$

1°/ distance plan - centre. Si > rayon alors pas d'intersection. Si $\leq$ rayon alors intersection.

$$d(O', \mathcal{P}) = \frac{3 \times 1 + 0 \times (-1) + 4 \times 2 - 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} \qquad \text{car } \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}}.$$

$$= \frac{10}{5} = 2 = R_0.$$

↳ Intersection est un point I, le plan $\mathcal{P}$ est tangent à S.

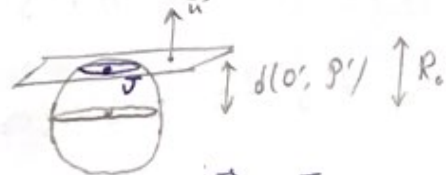
$\Rightarrow \vec{O'I} \parallel \vec{n}$ et $\|\vec{O'I}\| = 2 = R_0$.

$$\vec{O'I} = 2 \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \mapsto \vec{O'I} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I - 1 \\ y_I + 1 \\ z_I - 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{I = \begin{pmatrix} 6/5 + 1 \\ 0 - 1 \\ 8/5 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 0 \\ 18/5 \end{pmatrix}}.$$

car $\vec{u}_{unit} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{O'I}}{\|\vec{O'I}\|}$

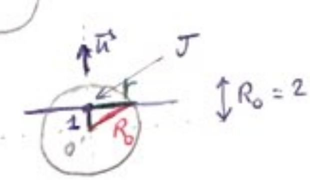
2°/ $d(O', \mathcal{P}') = \dfrac{3+8-6}{5} = 1 < R_0 = 2.$

↳ $\mathcal{P}' \cap S$ = cercle.



[Il faut son centre J, son rayon r
et sa normale $\vec{n}$.]

$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'J} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \overrightarrow{O'J}.$



$\|\overrightarrow{O'J}\| = 1, \quad \overrightarrow{O'J} = 1 \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

r = rayon du cercle d'intersect°.

↳ $\overrightarrow{OJ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -1 \\ 14/5 \end{pmatrix}$

Rayon $r = ?$ $\quad R_0^2 = 1^2 + r^2$ ↳ $r = \sqrt{R_0^2 - 1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Donc $\mathcal{P}' \cap S = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} : \left\{ \text{centre } J = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -1 \\ 14/5 \end{pmatrix}, \text{ rayon } r = \sqrt{3}, \right.$

$\left. \text{normale } \vec{n}' = \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$